

# 周波数解析(ウェーブレット解析) の基礎知識

2022年 ver. 1.0  
倉谷 隆博

# 1. 短時間フーリエ変換の考え方

フーリエ変換(式1)は、関数  $f(t)$  のなかに角周波数  $\omega$  の三角関数  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$  がどのくらい含まれているかを解析する方法である。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \dots \text{(式1)}$$

(式1)から分かるように時間軸上の積分範囲が  $-\infty$  から  $\infty$  であるため、フーリエ変換の結果である  $F(\omega)$  に時間情報  $t$  はなく、周波数  $\omega$  の情報だけが残る。それ故、フーリエ変換は、周波数の構成が時間に依存しない定常状態の場合とか長時間にわたる包括的な周波数解析を行うような場合、つまり時間情報に関する解析が不要な場合の周波数解析に使用される。ゆえに、時間とともに周波数構成が変化するような時間情報の解析が必要なデータの解析(例えば、音楽の周波数解析)には向いていない。

そこで、この問題をクリアするため、注目する時刻を移動させながら、注目する時刻あたりの信号を対象に局所的にフーリエ変換を繰り返す方法、つまり**時間と周波数の解析を同時に行う短時間フーリエ変換**(Short-time Fourier Transform) (式2)のアイデアが生まれた。

$$F_{\tau}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ f(t) w(t-\tau) \} e^{-j\omega t} dt \quad \dots \text{(式2)}$$

(式2)に示すように、注目する時刻(ここでは、時刻  $\tau$ ) 周辺だけの信号を切り出すための**窓関数**として時刻  $\tau$  の周辺にだけ値を持つような関数  $w(t-\tau)$  を用意し、関数  $f(t)$  から  $f(t) w(t-\tau)$  として信号を切り出して、この  $f(t) w(t-\tau)$  をフーリエ変換することで、 $f(t) w(t-\tau)$  のなかにどのくらいの三角関数  $e^{j\omega t}$  が含まれているかを解析する方法が短時間フーリエ変換である(図1)。短時間フーリエ変換によって、いつどのような周波数変化があったのか、つまり、時間と周波数を同時に解析することが可能になる。この短時間フーリエ変換は、スペクトログラムという視覚的な表現方法を使う声紋分析などに使用されている。

なお、窓関数  $w(t-\tau)$  として(式3)に示すガウス関数(Gaussian function)を用いるとき、この短時間フーリエ変換はガボール変換(Gabor transform)と呼ばれている。

$$w(t-\tau) = e^{-\alpha(t-\tau)^2} \quad \dots \text{(式3)}$$

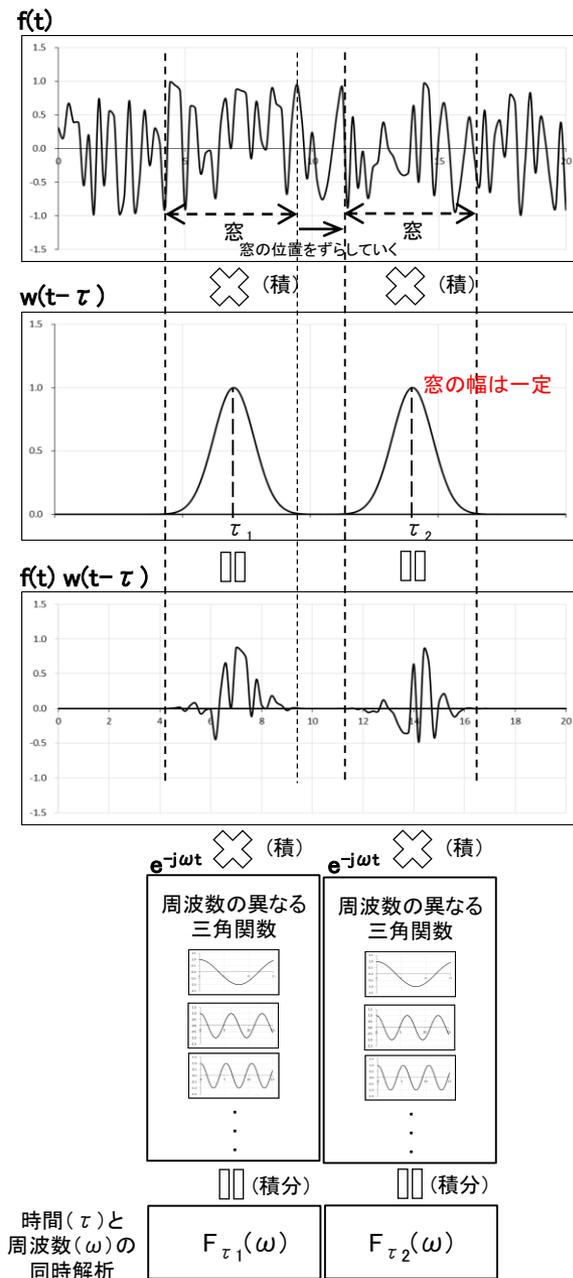
但し、 $\alpha$  はガウス関数の幅(時間窓の幅)に関わるパラメータ

周波数解析に特化するフーリエ変換に対して、時間と周波数の解析を同時にできるのが短時間フーリエ変換の強みである。

しかし、短時間フーリエ変換は(付録1)、(付録2)に示すような**不確定性関係**という問題を抱えている。この問題は、時間分解能を上げた解析と周波数分解能を上げた解析を同時に満たす解析は不可能であることを示している。

短時間フーリエ変換は、関数  $f(t)$  が激しく変化する場合も、緩やかに変化する場合も使用する時間軸の窓幅は一定であり、**不確定性関係という枠組みがあるなかで、時間分解能と周波数分解能をバランスさせて向上させようという仕組みを持っていない。**

この不確定性関係の問題に配慮した解析方法が、ウェーブレット変換である。



(図1) 短時間フーリエ変換の仕組み

# 2. 連続ウェーブレット変換の考え方

短時間フーリエ変換には不確定性関係への対応ができていないという問題がある。そこで、周波数の変化に合わせて時間軸の窓幅を変え、この不可避な不確定性関係の枠内で時間分解能と周波数分解能とのバランスをとっていこうというアイデアが生まれた。これがウェーブレット変換である。

ウェーブレット変換は、時間軸の窓幅を周波数の変化に合わせて時間分解能と周波数分解能をバランスをとって改善させようとする方法である。時間一周波数の同時解析方法であることは短時間フーリエ変換と同じである。周波数軸の窓幅を広くするとき、言い換えれば周波数分解能を落とすとき、つまり、周波数が高いときには、時間軸の窓幅を狭くして時間分解能を上げ、逆に、周波数が低いときには周波数分解能を上げるために時間軸の窓幅を広げて多くの情報を取り込む。

ウェーブレット変換の考え方のもとになる式を(式4)に示す。

$$F_{\tau}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ w(t-\tau) e^{-j\omega t} \} dt \quad \dots (式4)$$

この式は(式2)と同じであるが、式の括り方を変えている。窓関数  $w(t-\tau)$  を使って、時刻  $\tau$  周りに局在化する三角関数  $e^{j\omega t}$  の振動数を持った波形(小さな波)  $w(t-\tau) e^{j\omega t}$  を作り、この波形が関数  $f(t)$  のなかにどれくらい含まれているかを解析する式になっていると、(式4)を捉えることができる。

また、窓の機能を併せ持つ関数として  $w(t-\tau) e^{j\omega t}$  を見れば、**周波数によって窓関数としての  $w(t-\tau) e^{j\omega t}$  の時間軸の窓幅を変化させる**というアイデアが生まれる。

(図2)にウェーブレット変換の仕組みを示す。 $w(t-\tau) e^{-j\omega t}$  は周波数情報  $\omega$  と時間情報  $t$  を持つ関数である。このことに着目して、時間軸の窓幅を周波数によって変化させる関数として、 $w(t-\tau) e^{-j\omega t}$  を新たに定義し直したのが、(式5)に示す**ウェーブレット関数**である。**小さな波の束(波束)**であることから**ウェーブレット**と呼ばれる。

$$\psi_{a,b}(t) = 1/|a|^{1/2} \psi((t-b)/a) \quad \dots (式5)$$

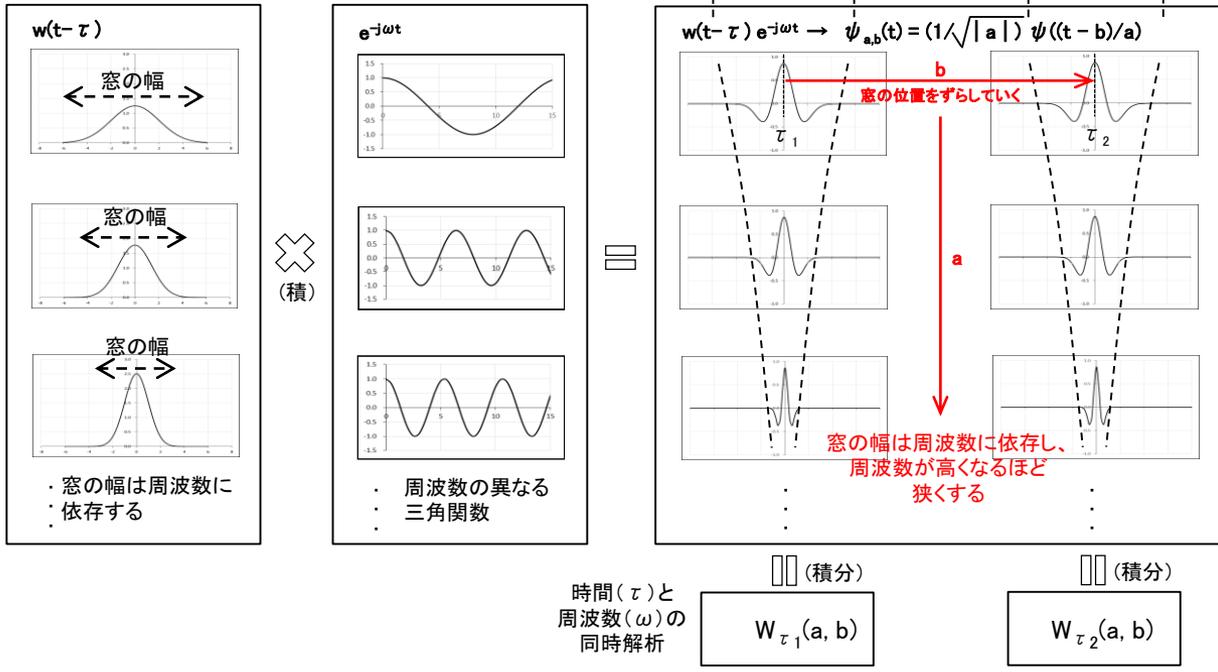
- a : スケールパラメータ
- b : シフトパラメータ

a は周波数に関わるパラメータで、値が小さくなれば周波数は高くなる。波束を伸縮させる機能を持つ。一方、b は波束を時間方向にシフトするパラメータである。なお、 $a=1, b=0$  のとき、 $\psi_{a,b}(t) = \psi(t)$  となり、マザーウェーブレット、アナライジングウェーブレット、もしくは基本ウェーブレットと呼ばれる。このウェーブレット関数を使うと(式4)は(式6)のように表すことができる。ここで、 $W(a, b)$  はウェーブレット係数と呼ばれる。

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad \dots (式6)$$

(式6)を**連続ウェーブレット変換**という。 $W(a, b)$  は関数  $f(t)$  と関数  $\psi_{a,b}^*(t)$  の積の積分(ここで、記号 \* は共役複素数を表す)。つまり、関数同士の内積になっている。**内積は似ている度合いを表す。言い換えれば、ウェーブレット係数  $W(a, b)$  は、関数  $f(t)$  にウェーブレット関数  $\psi_{a,b}(t)$  がどの程度含まれるかを表している。**

(付録3)に、よく知られているマザーウェーブレットをいくつか載せておいた



(図2)ウェーブレット変換の仕組み

# 3. 離散ウェーブレット変換(Discrete Wavelet Transform)

ウェーブレット変換の構造を理解するために、**ハール・ウェーブレット(Haar Wavelet)**がよく使われる。この資料でも、以降、ハール・ウェーブレットを使用する。

■ **2進区間** (decimal section) の定義

2進区間は(式7)で定義される。区間  $[0, 1)$  で(式7)を図示したものが(図3)である。

$$I_{j,k} = [k/2^j, (k+1)/2^j) \quad \dots \quad (式7)$$

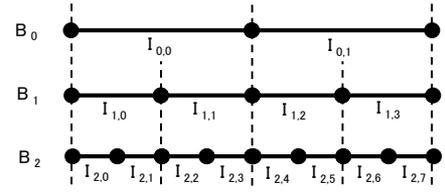
$$\text{集合 } B_j = \{ I_{j,k} \} \quad \dots \quad (式8)$$

ただし、 $j, k$  は整数、記号  $[ ]$  は値を含む閉区間、記号  $( )$  は値を含まない開区間を表す。

2進区間のそれぞれの区間は、(図3)から分かるように2区間に分割することができる。和集合  $U$  を使って表す(式9)。

$$I_{j,k} = I_{j+1,2k} \cup I_{j+1,2k+1} \quad \dots \quad (式9)$$

つまり、 $[k/2^j, (k+1)/2^j) = [2k/2^{j+1}, (2k+1)/2^{j+1}) \cup [(2k+1)/2^{j+1}, (2k+2)/2^{j+1}) \dots$  (式10)



(図3) 2進区間

■ **特性関数** (characteristic function) の定義

特性関数  $\chi_A(t)$  は、(式11)で定義される。

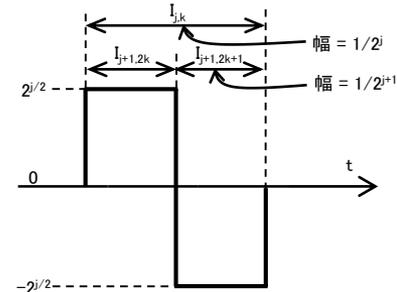
$$\chi_A(t) = 1 \quad (t \text{ が集合 } A \text{ の要素であるとき}), \chi_A(t) = 0 \quad (t \text{ が集合 } A \text{ の要素でないとき}) \quad \dots \quad (式11)$$

■ **ハール基底** の定義

ハール基底  $\{\psi_{j,k}^H(t)\}$  は、2進区間と特性関数を使用して(式12)で定義され、(図4)のような関数になる。

$$\psi_{j,k}^H(t) = 2^{j/2} (\chi_{I_{j+1,2k}}(t) - \chi_{I_{j+1,2k+1}}(t)) \quad \dots \quad (式12)$$

このハール基底は、**正規直交基底**になっている(つまり、同じ基底の内積 = 1, 異なる基底の内積 = 0)。



(図4) ハール基底

■ **ハール関数** の定義

ハール関数  $\psi(t)$  は(式13)で定義され、(図5)のような関数になる。

$$\psi(t) = 1 \quad (t \text{ が区間 } [0, 1/2) \text{ のとき}), \psi(t) = -1 \quad (t \text{ が区間 } [1/2, 1) \text{ のとき}), \psi(t) = 0 \quad (\text{他のとき}) \quad \dots \quad (式13)$$

ここで、ハール関数を用いてハール基底を表す。

$0 \leq 2^j t - k < 1/2$  とおくと、 $k \leq 2^j t < k + 1/2$  であるので、 $2k/2^{j+1} \leq t < (2k+1)/2^{j+1}$  が成り立つ。

この関係を使用して、(式12)のハール基底を、ハール関数  $\psi(t)$  を用いた下式で表すことができる。

$$\psi_{j,k}^H(t) = 2^{j/2} (\chi_{I_{j+1,2k}}(t) - \chi_{I_{j+1,2k+1}}(t)) = 2^{j/2} (\chi_{[0,1/2)}(2^j t - k) - \chi_{[1/2,1)}(2^j t - k)) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad \dots \quad (式14)$$

ところで、2進区間で使用しているパラメータ  $j$  は区間の幅を2倍に伸ばしたり、1/2倍に縮めたりする伸縮の機能を持っている。

また、パラメータ  $k$  は区間の位置を示す、つまり位置を変える(シフトさせる)機能を持っている。そこで、連続ウェーブレット関数(式5)のパラメータ  $a, b$  を、離散系のパラメータ  $j, k$  を使用した(式15)で置き換える。その結果、(式16)が求まる。

$$a = 1/2^j, \quad b = k/2^j \quad \dots \quad (式15)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 1/|1/2^{j/2}| \psi((t - k/2^j)/(1/2^j)) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad \dots \quad (式16)$$

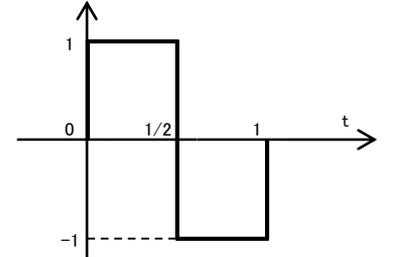
この(式16)は(式14)に一致する。これは、ハール基底  $\psi_{j,k}^H(t)$  を使用して、離散化したウェーブレット関数  $\psi_{j,k}(t)$  を表すことができることを示している。つまり、**ハール基底を使って離散ウェーブレット変換が実現できる**ことを示している。

例えば、離散ウェーブレット関数  $\psi_{0,0}(t)$  は  $\psi(t)$  となり、(図5)に示すハール関数と同じになる。また、離散ウェーブレット関数  $\psi_{1,2}(t) = 2^{1/2} \psi(2t - 2)$  を(図6)に示す。  $\psi_{1,2}(t)$  は、 $\psi_{0,0}(t)$  を横方向に1/2に圧縮、縦方向に  $2^{1/2}$  倍した後、右に1シフトした関数になる。

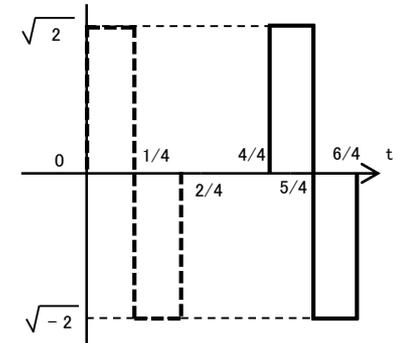
連続ウェーブレット変換の(式6)で、離散化したウェーブレット関数  $\psi_{j,k}(t)$  を使用した(式17)が**離散ウェーブレット変換**(内積)である。ここで、ウェーブレット関数として(式16)を使用した変換がハール・ウェーブレット変換になる。なお、ウェーブレット係数  $W(j, k)$  から元の関数  $f(t)$  に戻す変換はウェーブレット変換の反転公式(式18)と呼ばれている(附録13. 射影定理)。

$$W(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad \dots \quad (式17)$$

$$f(t) = \sum_{\text{全ての } j, k} W(j, k) \psi_{j,k}(t) \quad \dots \quad (式18)$$



(図5) ハール関数



(図6) ハール・ウェーブレット関数  $\psi_{1,2}(t)$

# 4. ツースケール関係 (two-scale relation)

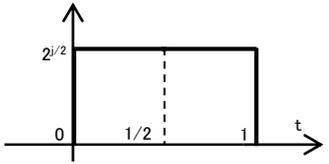
ウェーブレット解析を行うに当たっては、基底関数として、ウェーブレット関数(式16)とスケーリング関数(式19)を用意する。

■スケーリング関数の定義

ハールのウェーブレット関数  $\psi_{j,k}(t)$  に対応したスケーリング関数  $\phi_{j,k}(t)$  は2進区間と特徴関数を使い(式19)で定義される(図7)。

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \chi_{I_{j,k}}(t) = 2^{j/2} \chi_{[0,1)}(2^j t - k) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \dots \text{(式19)}$$

$$\phi(t) = 1 \text{ (} t \text{ が区間 } [0, 1) \text{ のとき), } \phi(t) = 0 \text{ (他のとき)} \dots \text{(式20)}$$



(図7) スケーリング関数

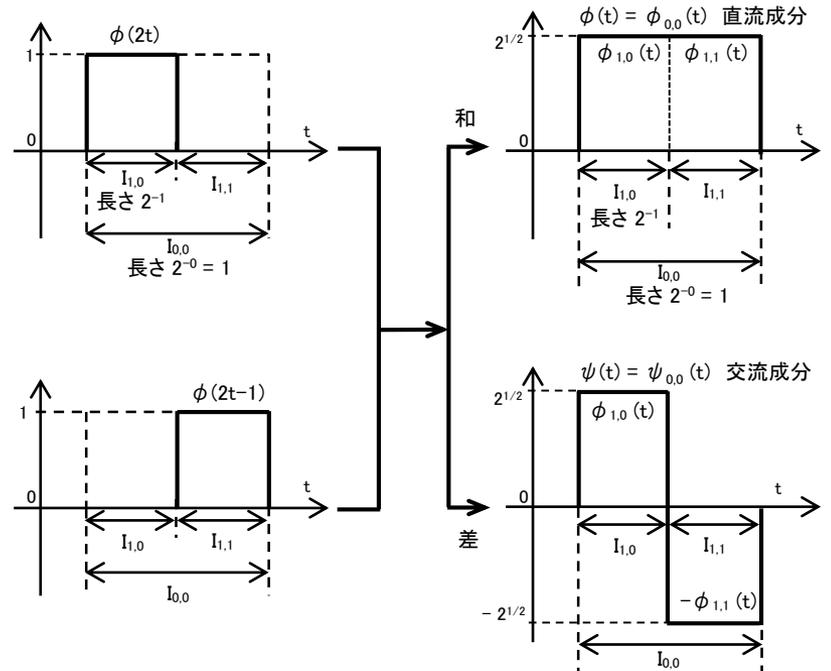
(式19)と(式16)から  $j=0, k=0$  のときの、スケーリング関数  $\phi_{0,0}(t)$  (式21)とウェーブレット関数  $\psi_{0,0}(t)$  (式22)を求める。

幅が1/2倍の関数  $\phi(2t), \phi(2t-1), \phi(2t-2), \dots$  で元の関数  $\phi(t), \psi(t)$  を表すことができる。このように、スケーリング関数を平行移動した複数の関数を線型結合することで1つ上のレベル(スケールが2倍)のスケーリング関数とウェーブレット関数を生成できることを**ツースケール関係**という。

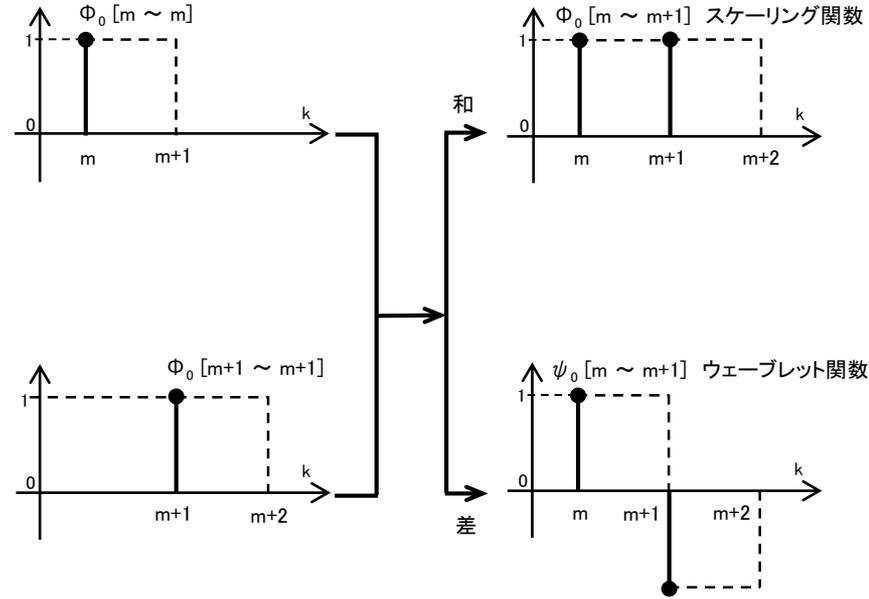
$$\phi(t) = \phi_{0,0}(t) = \phi_{1,0}(t) + \phi_{1,1}(t) = 2^{1/2} \phi(2t - 0) + 2^{1/2} \phi(2t - 1) = 2^{1/2} \{ \phi(2t) + \phi(2t - 1) \} \dots \text{(式21) スケーリング関数}$$

$$\psi(t) = \psi_{0,0}(t) = \phi_{1,0}(t) - \phi_{1,1}(t) = 2^{1/2} \phi(2t - 0) - 2^{1/2} \phi(2t - 1) = 2^{1/2} \{ \phi(2t) - \phi(2t - 1) \} \dots \text{(式22) ウェーブレット関数}$$

(式21)と(式22)関係を(図8)に示す。また、(図9)に離散データ表現(付録4)を使用したときの関係を示す。



(図8) ツースケール関係



(図9) ツースケール関係 (離散データ表現)

なお、区間  $[m \sim 2n-m+1]$  を2等分したときの前半区間  $[m \sim n]$  と後半区間  $[n+1 \sim 2n-m+1]$  に分けて、(式21)と(式22)の関係を一般化したのが下式である。(式23)は直流成分を表す。一方、(式24)は交流成分を表す。(付録4)に(式23)と(式24)の模式図を載せる。

$$\phi_0 [m \sim (2n - m + 1)] = \phi_0 [m \sim n] + \phi_0 [(n + 1) \sim (2n - m + 1)] \dots \text{(式23) スケーリング関数}$$

$$\psi_0 [m \sim (2n - m + 1)] = \phi_0 [m \sim n] - \phi_0 [(n + 1) \sim (2n - m + 1)] \dots \text{(式24) ウェーブレット関数}$$

# 5. ウェーブレット分解

離散ウェーブレット分解とは、2のべき乗個(2<sup>n</sup>個)のデータ列を、スケーリング関数(直流成分)と周波数が2<sup>j</sup>、時間シフトがk/2<sup>j</sup>のウェーブレット関数の束(交流成分)に分解することを言う。ウェーブレット分解は、ノイズ除去や異常振動などの不連続部分の検出など多くの分野で活用されている。

分解の手順は、2進区間を2分割する(式23)と(式24)から求まる(式25)と(式26)を使って行う。

$$2進区間の前半部 \quad \phi_0[m \sim n] = 1/2 \{ \phi_0[m \sim (2n - m + 1)] + \psi_0[m \sim (2n - m + 1)] \} \dots (式25)$$

$$2進区間の後半部 \quad \phi_0[(n + 1) \sim (2n - m + 1)] = 1/2 \{ \phi_0[m \sim (2n - m + 1)] - \psi_0[m \sim (2n - m + 1)] \} \dots (式26)$$

データ数が2<sup>3</sup> = 8個のデータ列  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_8\}$  を例に、データ列がスケーリング関数とウェーブレット関数の束に分解されることを示す。

データ列は、スケーリング関数を使用して次式のように表すことができる(図10)。

$$s = s_1 \phi_0[1 \sim 1] + s_2 \phi_0[2 \sim 2] + s_3 \phi_0[3 \sim 3] + s_4 \phi_0[4 \sim 4] + s_5 \phi_0[5 \sim 5] + s_6 \phi_0[6 \sim 6] + s_7 \phi_0[7 \sim 7] + s_8 \phi_0[8 \sim 8] \dots (式27)$$

ここで(式25)と(式26)を使用して、1/2区間のスケーリング関数を元の区間のスケーリング関数とウェーブレット関数を使用して表す。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0[1 \sim 4] &= 1/2 (\phi_0[1 \sim 8] + \psi_0[1 \sim 8]) \\ \phi_0[5 \sim 8] &= 1/2 (\phi_0[1 \sim 8] - \psi_0[1 \sim 8]) \end{aligned} \right\} \dots (式28)$$

区間をさらに1/2にして繰り返す。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0[1 \sim 2] &= 1/2 (\phi_0[1 \sim 4] + \psi_0[1 \sim 4]) = 1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] + \psi_0[1 \sim 8]) + \psi_0[1 \sim 4]) \\ \phi_0[3 \sim 4] &= 1/2 (\phi_0[1 \sim 4] - \psi_0[1 \sim 4]) = 1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] + \psi_0[1 \sim 8]) - \psi_0[1 \sim 4]) \\ \phi_0[5 \sim 6] &= 1/2 (\phi_0[5 \sim 8] + \psi_0[5 \sim 8]) = 1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] - \psi_0[1 \sim 8]) + \psi_0[5 \sim 8]) \\ \phi_0[7 \sim 8] &= 1/2 (\phi_0[5 \sim 8] - \psi_0[5 \sim 8]) = 1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] - \psi_0[1 \sim 8]) - \psi_0[5 \sim 8]) \end{aligned} \right\} \dots (式29)$$

区間幅が元の区間幅の1/2<sup>i</sup> = 1/2<sup>3</sup> = 1/8つまり、最小区間幅になるまで繰り返す。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0[1 \sim 1] &= 1/2 \{ \phi_0[1 \sim 2] + \psi_0[1 \sim 2] \} = 1/2 (1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] + \psi_0[1 \sim 8]) + \psi_0[1 \sim 4]) + \psi_0[1 \sim 2]) \\ \phi_0[2 \sim 2] &= 1/2 \{ \phi_0[1 \sim 2] - \psi_0[1 \sim 2] \} = 1/2 (1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] + \psi_0[1 \sim 8]) + \psi_0[1 \sim 4]) - \psi_0[1 \sim 2]) \\ \phi_0[3 \sim 3] &= 1/2 \{ \phi_0[3 \sim 4] + \psi_0[3 \sim 4] \} = 1/2 (1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] + \psi_0[1 \sim 8]) - \psi_0[1 \sim 4]) + \psi_0[3 \sim 4]) \\ \phi_0[4 \sim 4] &= 1/2 \{ \phi_0[3 \sim 4] - \psi_0[3 \sim 4] \} = 1/2 (1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] + \psi_0[1 \sim 8]) - \psi_0[1 \sim 4]) - \psi_0[3 \sim 4]) \\ \phi_0[5 \sim 5] &= 1/2 \{ \phi_0[5 \sim 6] + \psi_0[5 \sim 6] \} = 1/2 (1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] - \psi_0[1 \sim 8]) + \psi_0[5 \sim 8]) + \psi_0[5 \sim 6]) \\ \phi_0[6 \sim 6] &= 1/2 \{ \phi_0[5 \sim 6] - \psi_0[5 \sim 6] \} = 1/2 (1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] - \psi_0[1 \sim 8]) + \psi_0[5 \sim 8]) - \psi_0[5 \sim 6]) \\ \phi_0[7 \sim 7] &= 1/2 \{ \phi_0[7 \sim 8] + \psi_0[7 \sim 8] \} = 1/2 (1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] - \psi_0[1 \sim 8]) - \psi_0[5 \sim 8]) + \psi_0[7 \sim 8]) \\ \phi_0[8 \sim 8] &= 1/2 \{ \phi_0[7 \sim 8] - \psi_0[7 \sim 8] \} = 1/2 (1/2 (1/2 (\phi_0[1 \sim 8] - \psi_0[1 \sim 8]) - \psi_0[5 \sim 8]) - \psi_0[7 \sim 8]) \end{aligned} \right\} \dots (式30)$$

(式27)に(式30)を代入すると、データをウェーブレット分解した(式31)が求まる。

$$s = C_0^{(0)} \phi_0[1 \sim 8] + C_1^{(0)} \psi_0[1 \sim 8] + C_2^{(0)} \psi_0[1 \sim 4] + C_2^{(4)} \psi_0[5 \sim 8] + C_4^{(0)} \psi_0[1 \sim 2] + C_4^{(2)} \psi_0[3 \sim 4] + C_4^{(4)} \psi_0[5 \sim 6] + C_4^{(6)} \psi_0[7 \sim 8] \dots (式31)$$

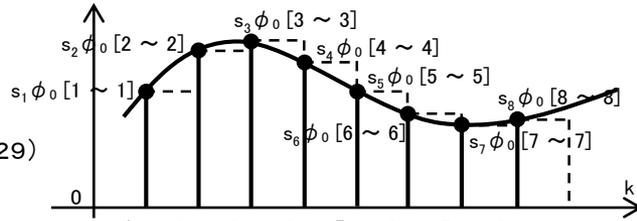
但し、

$$\left. \begin{aligned} C_0^{(0)} &= (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8)/8 && \dots \text{直流成分のスケーリング関数 } \phi_0[1 \sim 8] \text{ の係数} \\ C_1^{(0)} &= ((s_1 + s_2 + s_3 + s_4) - (s_5 + s_6 + s_7 + s_8))/8 && \dots \text{周波数 1 のウェーブレット関数 } \psi_0[1 \sim 8] \text{ の係数} \\ C_2^{(0)} &= ((s_1 + s_2) - (s_3 + s_4))/4 && \dots \text{周波数 2 のウェーブレット関数 } \psi_0[1 \sim 4] \text{ の係数} \\ C_2^{(4)} &= ((s_5 + s_6) - (s_7 + s_8))/4 && \dots \text{周波数 2 のウェーブレット関数 } \psi_0[1 \sim 4] \text{ を 4 サンプル時間シフトしたウェーブレット関数 } \psi_0[5 \sim 8] \text{ の係数} \\ C_4^{(0)} &= (s_1 - s_2)/2 && \dots \text{周波数 4 のウェーブレット関数 } \psi_0[1 \sim 2] \text{ の係数} \\ C_4^{(2)} &= (s_3 - s_4)/2 && \dots \text{周波数 4 のウェーブレット関数 } \psi_0[1 \sim 2] \text{ を 2 サンプル時間シフトしたウェーブレット関数 } \psi_0[3 \sim 4] \text{ の係数} \\ C_4^{(4)} &= (s_5 - s_6)/2 && \dots \text{周波数 4 のウェーブレット関数 } \psi_0[1 \sim 2] \text{ を 4 サンプル時間シフトしたウェーブレット関数 } \psi_0[5 \sim 6] \text{ の係数} \\ C_4^{(6)} &= (s_7 - s_8)/2 && \dots \text{周波数 4 のウェーブレット関数 } \psi_0[1 \sim 2] \text{ を 6 サンプル時間シフトしたウェーブレット関数 } \psi_0[7 \sim 8] \text{ の係数} \end{aligned} \right\} \dots (式32)$$

ここで、係数 C<sub>j</sub><sup>(k)</sup> の右下の添え字 j は周波数 2<sup>j</sup> を表す。例えば、j = 0 は 2<sup>0</sup> = 1 で直流、j = 2 は 2<sup>2</sup> = 4 で周波数 4 となる。  
また、係数 C<sup>(k)</sup> の右上の添え字 k は時間シフト k/2<sup>j</sup> を示す。

(式31)は、データ数 2<sup>3</sup> = 8 個のデータ列は、直流成分(2<sup>0</sup> = 1)と周波数 2<sup>1</sup> = 2 と 2<sup>2</sup> = 4 の交流成分に分解できることを示している。

(付録5)に、簡単な事例を使って、ウェーブレット分解(式31)の仕組みを図解する。



(図10)離散データ列(2<sup>3</sup> = 8 個)

# 6. ウェーブレット分解と合成のプロセス

ウェーブレット分解のプロセスを逐次進めていくと、分解のプロセスと合成のプロセスを視覚化することができる。2<sup>3</sup> = 8 個のデータ列  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_8\}$  を例にして確認する。なお、分解と合成の一連の計算プロセスを模式図として(付録6)に載せる。

## ■分解のプロセス

(式25)と(式26)を使用して、同色太文字の式部分を変形する(なお、式中の①, ②, ..., ⑥は、(図11)のグラフの番号に対応している)。

$$s = s_1 \phi_0[1\sim1] + s_2 \phi_0[2\sim2] + s_3 \phi_0[3\sim3] + s_4 \phi_0[4\sim4] + s_5 \phi_0[5\sim5] + s_6 \phi_0[6\sim6] + s_7 \phi_0[7\sim7] + s_8 \phi_0[8\sim8] \dots \text{(式27)}$$

$$A_4^{(0)} = (s_1 + s_2)/2, A_4^{(2)} = (s_3 + s_4)/2, A_4^{(4)} = (s_5 + s_6)/2, A_4^{(6)} = (s_7 + s_8)/2, C_4^{(0)} = (s_1 - s_2)/2, C_4^{(2)} = (s_3 - s_4)/2, C_4^{(4)} = (s_5 - s_6)/2, C_4^{(6)} = (s_7 - s_8)/2 \dots \text{(式33) と置くと、}$$

$$s = (A_4^{(0)} \phi_0[1\sim2] + C_4^{(0)} \psi_0[1\sim2]) + (A_4^{(2)} \phi_0[3\sim4] + C_4^{(2)} \psi_0[3\sim4]) + (A_4^{(4)} \phi_0[5\sim6] + C_4^{(4)} \psi_0[5\sim6]) + (A_4^{(6)} \phi_0[7\sim8] + C_4^{(6)} \psi_0[7\sim8]) \dots \text{(式34)}$$

$$s = ((A_4^{(0)} + A_4^{(2)})/2) \phi_0[1\sim4] + ((A_4^{(0)} - A_4^{(2)})/2) \psi_0[1\sim4] + ((A_4^{(4)} + A_4^{(6)})/2) \phi_0[5\sim8] + ((A_4^{(4)} - A_4^{(6)})/2) \psi_0[5\sim8] + C_4^{(0)} \psi_0[1\sim2] + C_4^{(2)} \psi_0[3\sim4] + C_4^{(4)} \psi_0[5\sim6] + C_4^{(6)} \psi_0[7\sim8]$$

$$A_2^{(0)} = (A_4^{(0)} + A_4^{(2)})/2, A_2^{(4)} = (A_4^{(4)} + A_4^{(6)})/2, C_2^{(0)} = (A_4^{(0)} - A_4^{(2)})/2, C_2^{(4)} = (A_4^{(4)} - A_4^{(6)})/2 \dots \text{(式35) と置くと、}$$

$$s = (A_2^{(0)} \phi_0[1\sim4] + C_2^{(0)} \psi_0[1\sim4]) + (A_2^{(4)} \phi_0[5\sim8] + C_2^{(4)} \psi_0[5\sim8]) + C_4^{(0)} \psi_0[1\sim2] + C_4^{(2)} \psi_0[3\sim4] + C_4^{(4)} \psi_0[5\sim6] + C_4^{(6)} \psi_0[7\sim8] \dots \text{(式36)}$$

$$s = ((A_2^{(0)} + A_2^{(4)})/2) \phi_0[1\sim8] + ((A_2^{(0)} - A_2^{(4)})/2) \psi_0[1\sim8] + C_2^{(0)} \psi_0[1\sim4] + C_2^{(4)} \psi_0[5\sim8] + C_4^{(0)} \psi_0[1\sim2] + C_4^{(2)} \psi_0[3\sim4] + C_4^{(4)} \psi_0[5\sim6] + C_4^{(6)} \psi_0[7\sim8]$$

$$C_0^{(0)} = (A_2^{(0)} + A_2^{(4)})/2, C_1^{(0)} = (A_2^{(0)} - A_2^{(4)})/2 \dots \text{(式37) と置くと、(式38)が求まる。}$$

$$s = (C_0^{(0)} \phi_0[1\sim8]) + (C_1^{(0)} \psi_0[1\sim8]) + (C_2^{(0)} \psi_0[1\sim4] + C_2^{(4)} \psi_0[5\sim8]) + (C_4^{(0)} \psi_0[1\sim2] + C_4^{(2)} \psi_0[3\sim4] + C_4^{(4)} \psi_0[5\sim6] + C_4^{(6)} \psi_0[7\sim8]) \dots \text{(式38)}$$

(式38)は(式27)をスケーリング関数とウェーブレット関数の組み合わせに分解した式であり、前述の(式31)に等しい。分解のプロセスは(式27)の係数を使って(式38)を表すことでもある。下記に、(式33)、(式35)、(式37)をまとめて再掲載するが、これらの式が分解のプロセスを表すことになる(図11)。

なお、上記の赤枠で囲った式①、③、⑤は分割2区間の平均値を求める操作、式②、④、⑥はそれぞれの差分になっており、後述する多重解像度解析のベースになる。

$$A_4^{(0)} = (s_1 + s_2)/2, A_4^{(2)} = (s_3 + s_4)/2, A_4^{(4)} = (s_5 + s_6)/2, A_4^{(6)} = (s_7 + s_8)/2, C_4^{(0)} = (s_1 - s_2)/2, C_4^{(2)} = (s_3 - s_4)/2, C_4^{(4)} = (s_5 - s_6)/2, C_4^{(6)} = (s_7 - s_8)/2 \dots \text{(式33)}$$

$$A_2^{(0)} = (A_4^{(0)} + A_4^{(2)})/2, A_2^{(4)} = (A_4^{(4)} + A_4^{(6)})/2, C_2^{(0)} = (A_4^{(0)} - A_4^{(2)})/2, C_2^{(4)} = (A_4^{(4)} - A_4^{(6)})/2 \dots \text{(式35)}$$

$$C_0^{(0)} = (A_2^{(0)} + A_2^{(4)})/2, C_1^{(0)} = (A_2^{(0)} - A_2^{(4)})/2 \dots \text{(式37)}$$

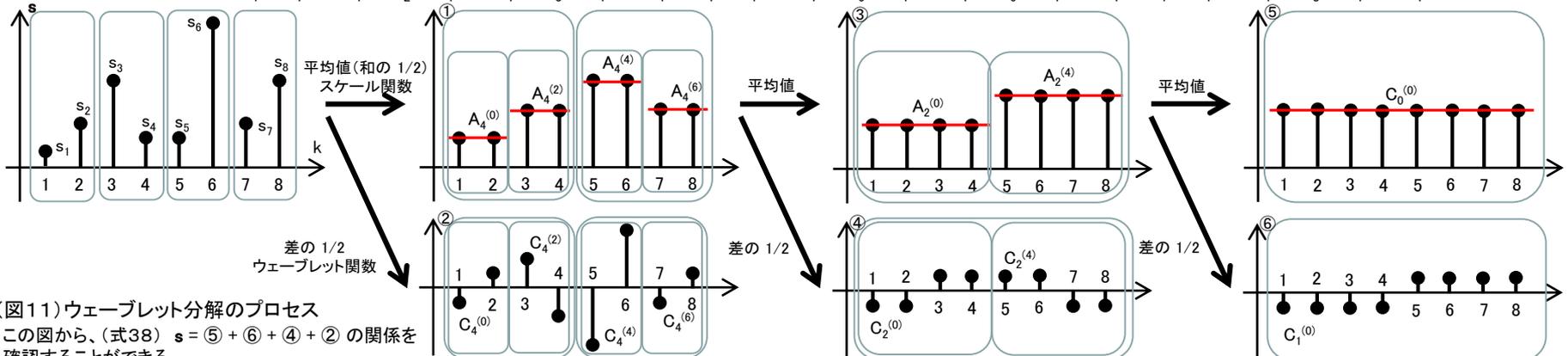
## ■合成のプロセス

分解のプロセスを逆にたどり、(式31)の係数を使用して(式27)の係数を求めることができる。下記の(式39)、(式40)、(式41)が合成のプロセスになる。(図11)の分解のプロセスを逆に遡れば合成のプロセスになる。

$$(式37)から、A_2^{(0)} = C_0^{(0)} + C_1^{(0)}, A_2^{(4)} = C_0^{(0)} - C_1^{(0)} \dots \text{(式39)}$$

$$(式35)から、A_4^{(0)} = A_2^{(0)} + C_2^{(0)}, A_4^{(2)} = A_2^{(0)} - C_2^{(0)}, A_4^{(4)} = A_2^{(4)} + C_2^{(4)}, A_4^{(6)} = A_2^{(4)} - C_2^{(4)} \dots \text{(式40)}$$

$$(式33)から、s_1 = A_4^{(0)} + C_4^{(0)}, s_2 = A_4^{(0)} - C_4^{(0)}, s_3 = A_4^{(2)} + C_4^{(2)}, s_4 = A_4^{(2)} - C_4^{(2)}, s_5 = A_4^{(4)} + C_4^{(4)}, s_6 = A_4^{(4)} - C_4^{(4)}, s_7 = A_4^{(6)} + C_4^{(6)}, s_8 = A_4^{(6)} - C_4^{(6)} \dots \text{(式41)}$$



(図11) ウェーブレット分解のプロセス  
この図から、(式38)  $s = ⑤ + ⑥ + ④ + ②$  の関係を確認することができる。

# 7. 多重解像度解析 (Multi-Resolution Analysis)

(図11)から分かるように、ウェーブレット分解のプロセスは2進区間ごとのデータの平均値を逐次計算するプロセスである。平均値計算はデータ平滑化、言い換えれば、解像度を1/2倍にするプロセスである。つまり、ウェーブレットの分解と合成のプロセスはデータの解像度を操作する機能を持っている。平均値計算に使うスケーリング関数  $\phi_{j,k}(t)$  でデータの解像度を操作し、その際生じる差分をウェーブレット関数  $\psi_{j,k}(t)$  で表す。このようなデータ解析の方法を多重解像度解析と言う。(図12)にデータ数 =  $2^6 = 64$  個のデータを対象とした多重解像度解析の様子を示す。(図11)は解像度を下げていくプロセスであるが、(図12)は2進区間ごとの平均値で元データを逐次近似して、データの解像度を上げていくプロセスである。(式38)から始めて(式36)、そして(式34)へと遡るイメージである。

ここで、多重解像度解析の差分がウェーブレット関数の和で表されることをデータ数  $2^3 = 8$  個のデータ列  $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_8\}$  を例にして確認しておく。

データ数 =  $2^3$  個の解像度としては、2進区間を元に 0, 1, 2, 3 を選択することができる。そこで、例えば解像度 3 のデータ列  $\mathbf{s}^{(3)}$  と解像度 2 のデータ列  $\mathbf{s}^{(2)}$  を比較して、解像度の差(解像度が悪くなる程度)  $e^{(2)} = \mathbf{s}^{(3)} - \mathbf{s}^{(2)}$  (差分という)を求めてみる。

$$\mathbf{s}^{(3)} = s_1^{(3)}\phi_0[1\sim1] + s_2^{(3)}\phi_0[2\sim2] + s_3^{(3)}\phi_0[3\sim3] + s_4^{(3)}\phi_0[4\sim4] \dots \quad (\text{式42})$$

$$+ s_5^{(3)}\phi_0[5\sim5] + s_6^{(3)}\phi_0[6\sim6] + s_7^{(3)}\phi_0[7\sim7] + s_8^{(3)}\phi_0[8\sim8]$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = s_1^{(2)}\phi_0[1\sim2] + s_2^{(2)}\phi_0[3\sim4] + s_3^{(2)}\phi_0[5\sim6] + s_4^{(2)}\phi_0[7\sim8] \dots \quad (\text{式43})$$

よって、誤差以下のように表される。

$$e^{(2)} = \mathbf{s}^{(3)} - \mathbf{s}^{(2)} \dots \quad (\text{式44})$$

(式44)を計算するにあたって、まず、(式42)の第1項と第2項と(式43)の第1項との差を求める。なお、式変形にあたっては以下の関係を使う。

$$\phi_0[1\sim2] = \phi_0[1\sim1] + \phi_0[2\sim2]$$

$$s_1^{(2)} = (s_1^{(3)} + s_2^{(3)})/2$$

$$s_1^{(3)}\phi_0[1\sim1] + s_2^{(3)}\phi_0[2\sim2] - s_1^{(2)}\phi_0[1\sim2]$$

$$= s_1^{(3)}\phi_0[1\sim1] + s_2^{(3)}\phi_0[2\sim2] - (s_1^{(3)} + s_2^{(3)})/2 \{ \phi_0[1\sim1] + \phi_0[2\sim2] \}$$

$$= (s_1^{(3)} - s_2^{(3)})/2 \phi_0[1\sim1] - (s_1^{(3)} - s_2^{(3)})/2 \phi_0[2\sim2]$$

$$= (s_1^{(3)} - s_2^{(3)})/2 (\phi_0[1\sim1] - \phi_0[2\sim2])$$

$$= (s_1^{(3)} - s_2^{(3)})/2 \psi_0[1\sim2] = C_4^{(0)}\psi_0[1\sim2]$$

同様に、(式42) - (式43)を計算するにあたって、以下の関係が求まる。

$$s_3^{(3)}\phi_0[2\sim2] + s_4^{(3)}\phi_0[3\sim3] - s_2^{(2)}\phi_0[3\sim4] = C_4^{(2)}\psi_0[3\sim4]$$

$$s_5^{(3)}\phi_0[4\sim4] + s_6^{(3)}\phi_0[5\sim5] - s_3^{(2)}\phi_0[5\sim6] = C_4^{(4)}\psi_0[5\sim6]$$

$$s_7^{(3)}\phi_0[6\sim6] + s_8^{(3)}\phi_0[7\sim7] - s_4^{(2)}\phi_0[7\sim8] = C_4^{(6)}\psi_0[7\sim8]$$

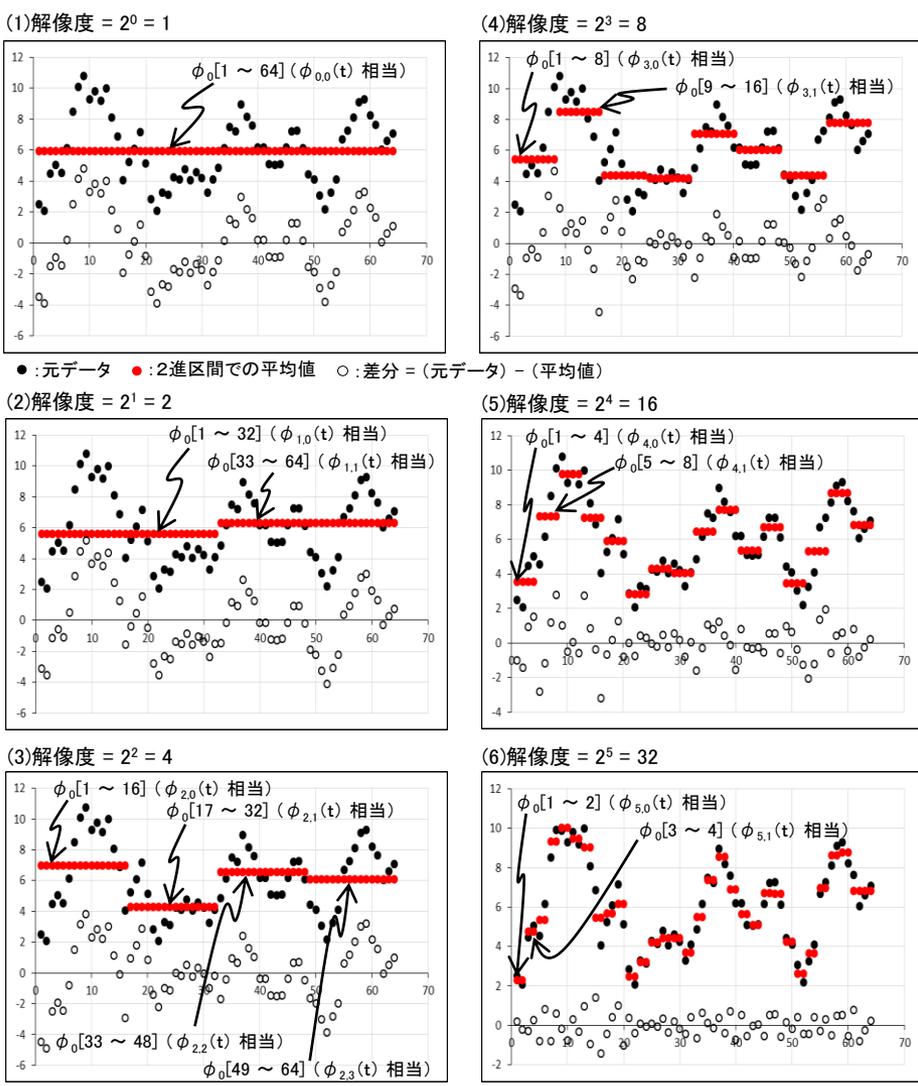
これらの結果をまとめて(式44)が求まる。

$$e^{(2)} = \mathbf{s}^{(3)} - \mathbf{s}^{(2)}$$

$$= C_4^{(0)}\psi_0[1\sim2] + C_4^{(2)}\psi_0[3\sim4] + C_4^{(4)}\psi_0[5\sim6] + C_4^{(6)}\psi_0[7\sim8] \dots \quad (\text{式44})$$

(式44)は、解像度の差分はウェーブレット関数で表すことができることを示している。つまり、平均値を表すスケール関数と解像度の差分をウェーブレット関数使ってデータ列を表すことができることが分かる。

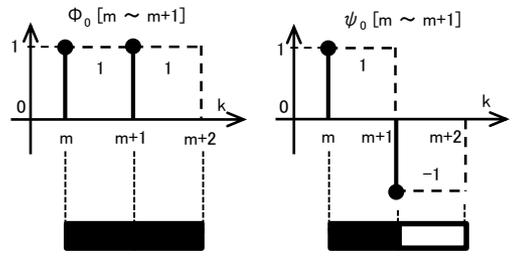
(付録7)にウェーブレット変換の活用事例として、ノイズ除去とデータ圧縮の簡単な事例を載せる。また、(付録14)に射影定理に基づく多重解像度解析の解釈付ける。



(図12) 多重解像度解析のプロセス

# 8. 2次元ウェーブレット変換

1次元ウェーブレット変換を、2次元ウェーブレット変換に拡張する。つまり、(図13)に示す1次元ウェーブレット変換の基底関数であるスケーリング関数  $\phi_0$  とウェーブレット関数  $\psi_0$  をもとに、2次元に拡張した基底関数を用意する(図14)。図中の4種類のマスクが2次元ウェーブレット変換の基底関数になる。



(注) 値 1 の画素を黒塗りで、値 -1 の画素を白塗りで表す。

(図13) 1次元ウェーブレット変換の基底関数

4 × 4 画素のデータを対象に2次元のウェーブレット変換の手順を示す。基本的に1次元のウェーブレット分解と同じ手順である。

(1) 2 × 2 画素 = 4 画素を対象に、平均マスク、縦縞マスク、横縞マスク、格子縞マスクの演算を行う(図15)。

例えば、4 画素が  $s_{1,1}, s_{1,2}, s_{2,1}, s_{2,2}$  であるとき、平均値の係数  $D_{1,1}^{(1)}$ 、縦縞の係数  $V_{1,1}^{(2)}$ 、横縞の係数  $H_{1,1}^{(2)}$ 、格子縞の係数  $L_{1,1}^{(2)}$  は以下のようにして求めることができる。

- 平均マスクを使った演算  $D_{1,1}^{(1)} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1/4 (s_{1,1} + s_{1,2} + s_{2,1} + s_{2,2})$  (注)演算子 \* は、行列 A と行列 B とのフロベニウス積の1/4 と定義する。フロベニウス積は、 $\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$  で計算される。ここで、1/4 は 4 画素の情報を 1 画素に圧縮していることに由来する。
- 縦縞マスクを使った演算  $V_{1,1}^{(2)} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1/4 (s_{1,1} - s_{1,2} + s_{2,1} - s_{2,2})$
- 横縞マスクを使った演算  $H_{1,1}^{(2)} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1/4 (s_{1,1} + s_{1,2} - s_{2,1} - s_{2,2})$
- 格子縞マスクを使った演算  $L_{1,1}^{(2)} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1/4 (s_{1,1} - s_{1,2} - s_{2,1} + s_{2,2})$

	$\phi_0 [m \sim m+1] = [1 \ 1]$ 	$\psi_0 [m \sim m+1] = [1 \ -1]$ 
$\phi_0 [m \sim m+1] = [1 \ 1]$ 	$\phi_0 [m \sim m+1] \# \phi_0 [m \sim m+1]$ $= [1 \ 1] \# [1 \ 1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ... 平均マスク	$\phi_0 [m \sim m+1] \# \psi_0 [m \sim m+1]$ $= [1 \ 1] \# [1 \ -1] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ... 縦縞マスク
$\psi_0 [m \sim m+1] = [1 \ -1]$ 	$\psi_0 [m \sim m+1] \# \phi_0 [m \sim m+1]$ $= [1 \ -1] \# [1 \ 1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ... 横縞マスク	$\psi_0 [m \sim m+1] \# \psi_0 [m \sim m+1]$ $= [1 \ -1] \# [1 \ -1] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ... 格子縞マスク

(注) 演算子 # を次のように定義する。

$$[a \ b] \# [c \ d] = \begin{pmatrix} ab & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$$

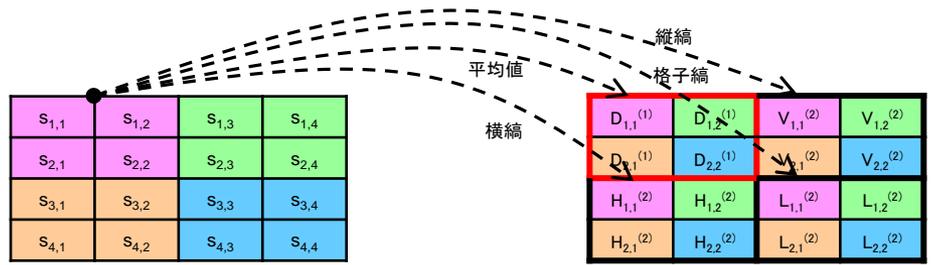
(図14) 2次元ウェーブレット変換の基底関数

なお、これらの演算は1次元のウェーブレット分解で使う(式33)、(式35)、(式37)を、行と列に順次適用する方法と同じになる。例えば、 $L_{1,1}^{(2)}$  は、行での演算結果  $1/2(s_{1,1} - s_{1,2})$  と  $1/2(s_{2,1} - s_{2,2})$  を使って、列の演算を行うことによって求まる。具体的には、 $L_{1,1}^{(2)} = 1/2 \{1/2(s_{1,1} - s_{1,2}) - 1/2(s_{2,1} - s_{2,2})\} = 1/4 (s_{1,1} - s_{1,2} - s_{2,1} + s_{2,2})$  となり、格子縞マスクを使った演算結果と同じになる。

このような演算を他の全ての  $2 \times 2$  画素、 $s_{1,3}, s_{1,4}, s_{2,3}, s_{2,4}$  と  $s_{3,1}, s_{3,2}, s_{4,1}, s_{4,2}$  と  $s_{3,3}, s_{3,4}, s_{4,3}, s_{4,4}$  についても順次行うことによって、(図15)に示すように、4 × 4 画素のデータが、2 × 2 画素の平均値と 2 × 2 画素の3種類の縞模様データに分解される。

(2) 次いで、平均値を表す  $2 \times 2$  画素の  $D_{1,1}^{(1)}, D_{1,2}^{(1)}, D_{2,1}^{(1)}, D_{2,2}^{(1)}$  を対象に、(1)と同じ演算を行う。この演算を、平均値を表す画素が 1 画素になるまで行う。

なお、(付録8)に、2次元ウェーブレット変換の図解、そして、(付録9)に画像のデータ圧縮の例を載せる。



(注) 右肩の ( ) の数字は、解像度のレベルを表す。

この図は、2次元ウェーブレット変換の仕組みの説明によく使用されている。多重解像度解析のプロセスの全体像を俯瞰することができる。

(図15) 2次元ウェーブレット変換の演算

# 付録1. 短時間フーリエ変換の不確定性関係

短時間フーリエ変換が抱える不確定性関係が一般的に成立することを確認する。

・窓幅の定義

$f(t)$  を窓関数とする。

(付式1)で表される、時間  $t$  軸上の確率密度分布  $P(t)$  を考える。 $P(a \leq t \leq b) = \int_a^b |f(t)|^2 dt / \|f\|^2 \dots$  (付式1) 但し、 $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$  (ノルム)

この分布の確率変数  $t$  の平均値は、 $M_t = \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt / \|f\|^2 \dots$  (付式2)

また、確率変数  $t$  の標準偏差を  $\Delta t$  とすれば、分散  $(\Delta t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - M_t)^2 |f(t)|^2 dt / \|f\|^2 \dots$  (付式3)

この標準偏差  $\Delta t$  が時間軸上の窓の半径になる。よって、時間軸の窓幅は  $[M_t - \Delta t, M_t + \Delta t]$ 、窓の大きさは  $2\Delta t$  である。

(付式3)で、 $M_t = 0, \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1$  (規格化)  $\dots$  (付式4) とおけば、 $(\Delta t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \dots$  (付式5)

同様に、周波数軸の窓の半径を  $\Delta \omega$  とおけば、周波数軸の窓幅は  $[M_\omega - \Delta \omega, M_\omega + \Delta \omega]$ 、窓の大きさは  $2\Delta \omega$  である。

ここで、 $M_\omega = 0, \|F\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 1$  (規格化)  $\dots$  (付式6) とおけば、 $(\Delta \omega)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega \dots$  (付式7)

ただし、 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$  (フーリエ変換)  $f(t) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$  (フーリエ逆変換)

・不確定性関係の導出

まず、逆フーリエ変換の式の両辺を  $t$  で微分すると、 $df(t)/dt = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \dots$  (付式8)

(付式8)に対してパーセバルの等式(付録10)を使うと、 $F^*(\omega)$  は  $F(\omega)$  の共役複素数であり、 $|F(\omega)|^2 = F(\omega) F^*(\omega)$  であるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |df(t)/dt|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega F(\omega) e^{j\omega t}|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega = (\Delta \omega)^2 \dots$$
 (付式9)

また、シュワルツの不等式(付録11)を使用すれば、(付式10)が得られる。

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t f^*(t) df(t)/dt dt \right|^2 \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |df(t)/dt|^2 dt \right\} \dots$$
 (付式10)

一方、極座標表示を使用して、

$f(t) = r e^{jt}$  とおけば、 $f^*(t) = r e^{-jt}$ ,  $df(t)/dt = j r e^{jt}$  であるので、 $|f(t)|^2 = f(t) f^*(t) = (r e^{jt})(r e^{-jt}) = r^2$  よって、 $d|f(t)|^2/dt = d r^2/dt = 2r dr/dt$   
 また、 $f^*(t) df(t)/dt = (r e^{-jt}) \{ j r e^{jt} \} = j r^2$  よって、 $1/2 \{ d|f(t)|^2/dt \} = f^*(t) df(t)/dt$

したがって、下記の部分積分の式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} t f^*(t) \{ df(t)/dt \} dt = \left[ t \{ 1/2 |f(t)|^2 \} \right]_{-\infty}^{\infty} - 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \dots$$
 (付式11)

ここで、 $f(t)$  は窓関数であるので、 $f(-\infty) = 0, f(\infty) = 0$  であり、また(付式4)より、(付式11) =  $-1/2$  となる。

よって、(付式10)の左辺を(付式11)の結果に置き換え、また(付式10)の右辺に(付式5)と(付式9)の結果を代入すると、(付式12)が得られる。

$$(-1/2)^2 \leq (\Delta t)^2 (\Delta \omega)^2 \quad \text{従って、(時間軸の窓幅)} \cdot \text{(周波数軸の窓幅)} = (2\Delta t)(2\Delta \omega) \geq 2 \dots$$
 (付式12)

(付式12)が短時間フーリエ変換における不確定性の関係である。

(付式12)は、周波数特性の変化がいつ起きたのかを詳細に把握するために時間分解能を上げなくてはならない(時間窓の幅  $\Delta t$  を狭くしなくてはならない)が、周波数特性を詳細に把握するために周波数分解能を同時に上げる(周波数窓の幅  $\Delta \omega$  を狭くすること)はできない、つまり時間分解能と周波数分解能を同時に向上させることはできないトレードオフの関係にあることを示している。高周波成分については時間分解能が高く、周波数分解能は低い。逆に低周波成分については周波数分解能は高く、時間分解能が低い。(次頁の付図1)。

# 付録2. ガボール(Gabor)変換の不確定性関係

短時間フーリエ変換で、窓関数としてガウス関数を選んだとき、このような短時間フーリエ変換をガボール変換という。ガボール変換では、(付録1)示した不確定関係(付式12)の等号が成り立つ。ここでは、この等号関係を確認する。

窓関数に使用するガウス関数を(付式13)のように設定する。

$$f(t) = 1/(2\sqrt{\pi\alpha}) e^{-t^2/(4\alpha)} \quad \dots \text{(付式13)}$$

また、(付式13)のガウス関数のフーリエ変換は(付録12)の(付式32)を参考にして、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1/(2\sqrt{\pi\alpha}) e^{-t^2/(4\alpha)} e^{-j\omega t} dt = 1/(2\sqrt{\pi\alpha}) \sqrt{4\pi\alpha} e^{-\alpha\omega^2} = e^{-\alpha\omega^2} \quad \dots \text{(付式14)}$$

ここで、時間軸の窓の幅(半径)  $\Delta_{wt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt} \quad \dots \text{(付式15)}$

$$\text{(付録12)の(付式29)を使って、(付式15)の(分母)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [1/(2\sqrt{\pi\alpha}) e^{-t^2/(4\alpha)}]^2 dt = 1/(4\pi\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(2\alpha)} dt = 1/(4\pi\alpha) \sqrt{2\pi\alpha} = 1/\sqrt{8\pi\alpha}$$

$$\text{(付録12)の(付式31)を使って、(付式15)の(分子)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \{1/(2\sqrt{\pi\alpha}) e^{-t^2/(4\alpha)}\}^2 dt = 1/(4\pi\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/(2\alpha)} dt = 1/(4\pi\alpha) \{1/2\sqrt{\pi(2\alpha)^3}\} = \sqrt{\alpha/8\pi}$$

$$\text{よって、}\Delta_{wt} = \sqrt{\sqrt{\alpha/8\pi} / (1/\sqrt{8\pi\alpha})} = \sqrt{\alpha}$$

また、周波数軸の窓の幅(半径)  $\Delta_{w\omega} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 F^2(\omega) d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\omega) d\omega} \quad \dots \text{(付式16)}$

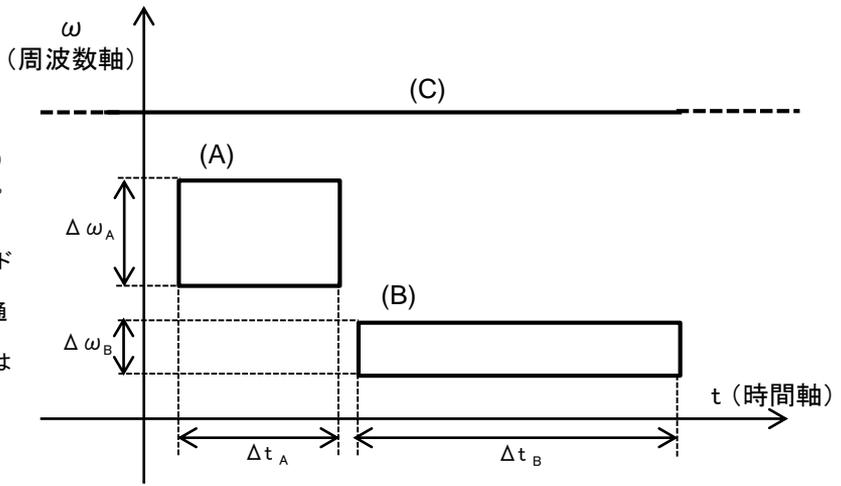
$$\text{(付式14)、および(付録12)の(付式29)を使って、(付式16)の(分母)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha\omega^2} d\omega = \sqrt{\pi/(2\alpha)}$$

$$\text{(付式14)、および(付録12)の(付式31)を使って、(付式16)の(分子)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-2\alpha\omega^2} d\omega = 1/2\sqrt{\pi/(2\alpha)^3} = 1/(4\alpha)\sqrt{\pi/(2\alpha)}$$

$$\text{よって、}\Delta_{w\omega} = \sqrt{1/(4\alpha)\sqrt{\pi/(2\alpha)} / \sqrt{\pi/(2\alpha)}} = 1/(2\sqrt{\alpha})$$

従って、 $(\Delta_{wt})(\Delta_{w\omega}) = \sqrt{\alpha} \{1/(2\sqrt{\alpha})\} = 1/2 \quad \dots \text{(付式17)}$

(付図1)の説明  
 (付式12)によれば、短時間フーリエ変換では、時間分解能( $\Delta t$ )と周波数分解能( $\Delta \omega$ )の積を1/2より小さくすることはできない。つまり、時間軸上の変化の検出感度を上げるために時間分解能を小さくしても( $\Delta t_B \rightarrow \Delta t_A$ )、逆に、周波数分解能は悪くなる( $\Delta \omega_B \rightarrow \Delta \omega_A$ )。つまり、時間分解能と周波数分解能はトレードオフの関係にある。  
 なお、時間分解能を無限大にしたときの短時間フーリエ変換は通常のフーリエ変換になるが、これは(付式12)において $\Delta t \rightarrow \infty$ とした場合に相当する。周波数だけに注目した解析になる。これはこの図のケース(C)に相当すると考えられる。



(付図1) 時間分解能と周波数分解の関係

# 付録3. マザー ウェーブレット

マザーウェーブレットは、下記の条件を満たしている。

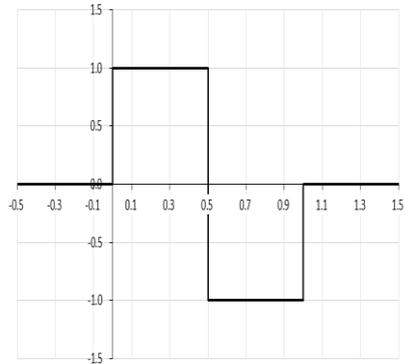
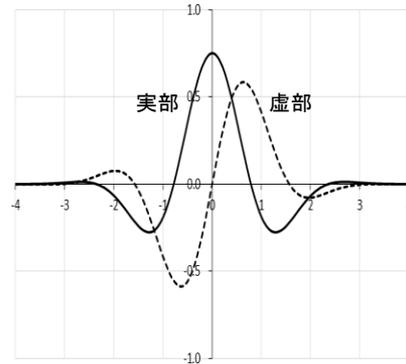
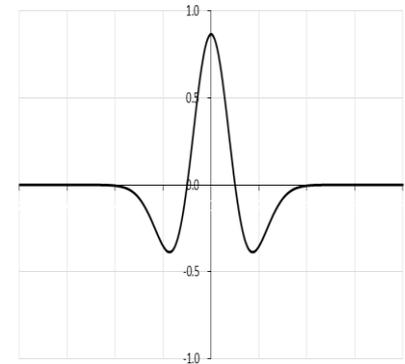
- (1)  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \dots$  (付式18)  
 (付式18)は、 $\psi(t)$  は有限のエネルギーを持つことを表している。
- (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 / |\omega| < \infty \dots$  (付式19) 但し、 $\Psi(\omega)$  は、 $\psi(t)$  のフーリエ変換である。つまり、 $\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt \dots$  (付式20)  
 (付式19)は、ウェーブレットの逆変換(反転公式、説明省略)が成立するための条件であり、**アドミッシブル条件**と呼ばれている。  
 (付式19)が  $\omega = 0$  で発散しないようにするには、 $\Psi(0) = 0$  である必要がある。つまり、 $\psi(t)$  は 0 の周波数成分(直流成分)を持たないことを意味している。  
 このことから、ウェーブレット解析では、ウェーブレット関数に加えて、直流成分を表すスケーリング関数を設けることになる。
- (3)  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \dots$  (付式21)  
 (2)より  $\Psi(0) = 0$  であるから、(付式20)で  $\omega = 0$  とおけば  $\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^0 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$  となり、(付式21)が得られる。(付式20)の代わりに使用される。  
 (付式21)は、 $\psi(t)$  の積分面積が 0 であることを表し、また(付式18)は、 $t$  の値が大きくなると  $\psi(t)$  が 0 に近づく、つまり関数が局在化していることを表している。  
 これらのことから、 $\psi(t)$  は局在化して正負の領域を振動する関数であることをイメージさせる。これは、まさしく波束(ウェーブレット)である。

また、**規格化条件**(付式22)を満たすようにマザーウェーブレットの係数を設定する。

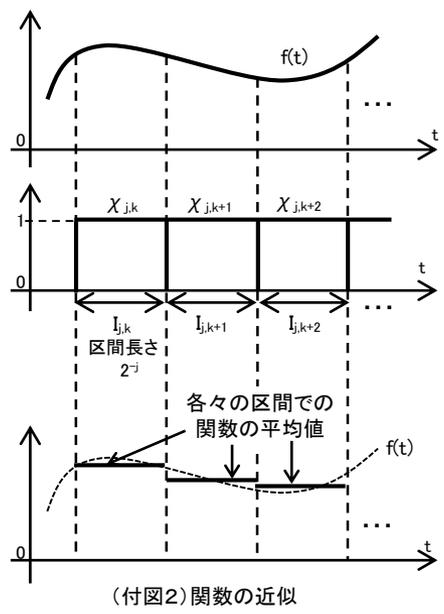
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1 \text{ (面積 = 1)} \dots \text{ (付式22)}$$

(付表1)に代表的なマザーウェーブレットをまとめておいた。他にも、Daubechies, Coiflet, Symlet, Meyer などのマザーウェーブレットが提案されている。

(付表1) 代表的なマザーウェーブレット

名称	ハール・ウェーブレット (Haar wavelet)	モルレー・ウェーブレット (Morlet wavelet) ガボール・ウェーブレット (Gabor wavelet)	メキシカン・ウェーブレット (Mexican wavelet) リックカー・ウェーブレット (Ricker wavelet)
特徴	最もシンプルなウェーブレットである 明らかに規格化条件もアドミッシブル条件も満たす しかし、連続な関数ではない(微分できない)	Standard 版はアドミッシブル条件を満たさない しかし、周波数を上げれば条件を満たすと見なせる なお、アドミッシブル条件を満たすように改善された のがマザーウェーブレットが Complete 版である	ガウス関数から導出される
式	$\psi(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq t < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$	Standard 版: $\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{j\omega t} e^{-t^2/2}$ Complete 版: $\psi(t) = \pi^{-1/4} (1 + e^{-\omega^2} - 2e^{-3/4\omega^2})(e^{j\omega t} - e^{-\omega^2/2})e^{-t^2/2}$	$\psi(t) = \{ 2/(3^{1/2} \pi^{1/4}) \} (1 - t^2) e^{-t^2/2}$
形			

# 付録4. 離散データの表記方法

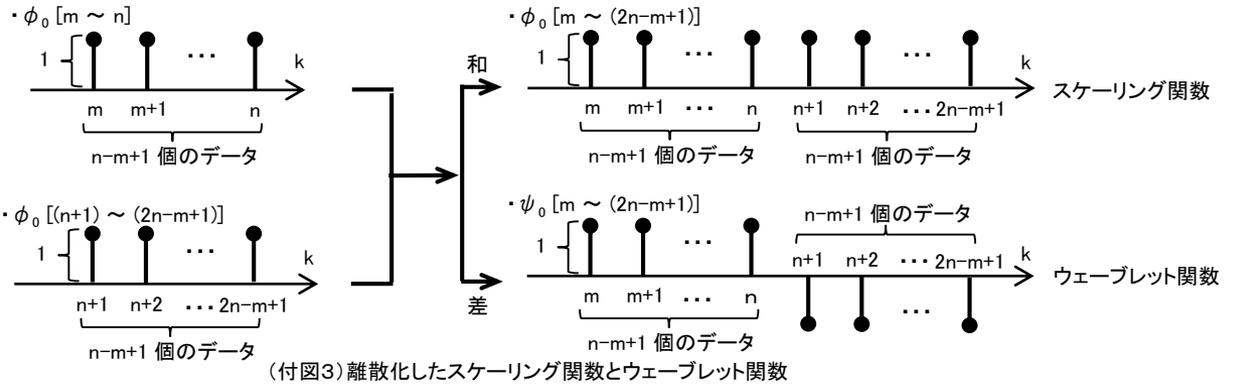


関数  $f(t)$  ( $j$  固定)は、スケーリング関数(式19)との内積を使って(付式23)で表すこともできる(附録13. 射影定理)。

$$f(t) \text{ の近似式 } = P_j(f(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j,k}^*(t) dt \right\} \phi_{j,k}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{j/2} \chi_{j,k}(t) dt \right\} 2^{j/2} \chi_{j,k}(t)$$

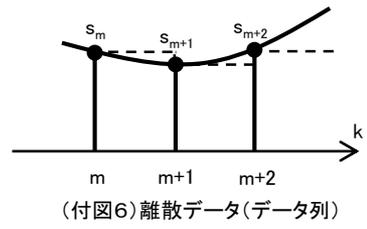
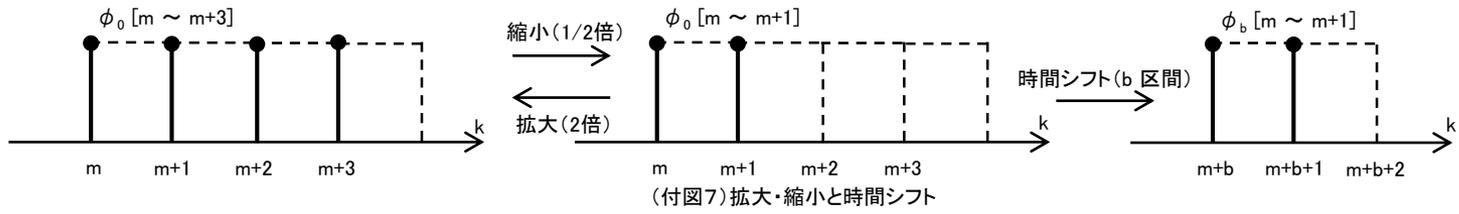
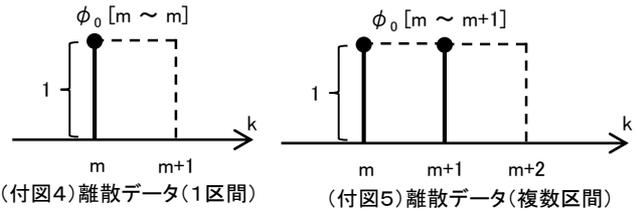
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \chi_{i,k}(t) dt \right\} \chi_{j,k}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \chi_{j,k}(t) dt \right) / 2^j \right\} \chi_{j,k}(t) \dots \text{(付式23)}$$

この式は(付図2)に示すように、 $f(t) \chi_{j,k}(t)$  は区間  $I_{j,k}$  ごとの関数  $f(t)$  であり、その積分値を区間  $I_{j,k}$  の大きさ  $2^{-j}$  で割っているの、この区間での関数  $f(t)$  の平均値を求めている。(式23)はこのような区間ごとの平均値の集まりで関数  $f(t)$  が構成される(近似される)ことを示す。(式19)と(式16)の係数  $2^{j/2}$  は区間  $I_{j,k}$  の長さ  $2^{-j}$  に関わる係数であるが、下記に示す離散データの表記方法を使用して閉区間の左側端点の値がハール関数の区間平均値を表すことにすれば、この表記方法を使用して、(式23)と(式24)は(付図3)のように表すことができる。



## ■離散データの表記方法

- 半開区間  $[m \sim m+1)$  で値 1 を取ることを、 $\phi_0[m \sim m] = 1$  と記して、(付図4)のように表す。  
区間記号  $[m$  もしくは  $m]$  は、区間として  $m$  を含むこと(閉区間であること)を意味し、  
区間記号  $(m$  もしくは  $m)$  は、区間として  $m$  を含まないこと(開区間であること)を意味する。
- 半開区間  $[m \sim m+2)$  で値 1 を取ることを、 $\phi_0[m \sim m+1] = 1$  で表す(付図5)。
- よって、例えば、データ列  $s = \{s_m, s_{m+1}, \dots\}$  が、時刻  $m$  で  $s_m$  の値、時刻  $m+1$  で  $s_{m+1}$  の値、 $\dots$  を取るときには、下記のように表すことができる(付図6)。  
 $s = \{s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots\} = s_m \phi_0[m \sim m] + s_{m+1} \phi_0[m+1 \sim m+1] + s_{m+2} \phi_0[m+2 \sim m+2] + \dots$
- 2進区間を使用する場合、時間軸方向の縮小・拡大( $1/2^i$ )と時間軸方向のシフトを( $k/2^i$ )を(付図7)に示す。  
なお、時間軸方向にシフトしたデータ  $\phi_0[m+b \sim m+b+1]$  は  $\phi_b[m \sim m+1]$  と表す。



# 付録5. ウェーブレット分解の図解

データ列  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_8\} = \{1, 5, 2, 8, 8, 4, 5, 7\}$  を例にウェーブレット分解を図解する。

ウェーブレット分解したときの係数を(式32)を使用して求める。

$$C_0^{(0)} = (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8) / 8 = (1+5+2+8+8+4+5+7) / 8 = 5$$

$$C_1^{(0)} = ((s_1 + s_2 + s_3 + s_4) - (s_5 + s_6 + s_7 + s_8)) / 8 = ((1+5+2+8) - (8+4+5+7)) / 8 = -1$$

$$C_2^{(0)} = ((s_1 + s_2) - (s_3 + s_4)) / 4 = ((1+5) - (2+8)) / 4 = -1$$

$$C_2^{(4)} = ((s_5 + s_6) - (s_7 + s_8)) / 4 = ((8+4) - (5+7)) / 4 = 0$$

$$C_4^{(0)} = (s_1 - s_2) / 2 = (1-5) / 2 = -2$$

$$C_4^{(2)} = (s_3 - s_4) / 2 = (2-8) / 2 = -3$$

$$C_4^{(4)} = (s_5 - s_6) / 2 = (8-4) / 2 = 2$$

$$C_4^{(6)} = (s_7 - s_8) / 2 = (5-7) / 2 = -1$$

よって、この結果を(式31)に代入すれば、下記のウェーブレット分解が完成する(付図8)。

$$s = C_0^{(0)} \phi_0 [1 \sim 8] + C_1^{(0)} \psi_0 [1 \sim 8] + C_2^{(0)} \psi_0 [1 \sim 4] + C_2^{(4)} \psi_0 [5 \sim 8] + C_4^{(0)} \psi_0 [1 \sim 2] + C_4^{(2)} \psi_0 [3 \sim 4] + C_4^{(4)} \psi_0 [5 \sim 6] + C_4^{(6)} \psi_0 [7 \sim 8]$$

$$s = \dots \textcircled{6}$$

$$5 \phi_0 [1 \sim 8] \dots \textcircled{1}$$

$$-1 \psi_0 [1 \sim 8] \dots \textcircled{2}$$

$$-1 \psi_0 [1 \sim 4] + 0 \psi_0 [5 \sim 8] \dots \textcircled{3}$$

$$-2 \psi_0 [1 \sim 2] - 3 \psi_0 [3 \sim 4] \dots \textcircled{4}$$

$$+ 2 \psi_0 [5 \sim 6] - 1 \psi_0 [7 \sim 8] \dots \textcircled{5}$$

直流成分  
スケール関数  
 $\phi_0 [1 \sim 8]$

周波数 =  $2^0 = 1$   
ウェーブレット関数  
 $\psi_0 [1 \sim 8]$

周波数 =  $2^1 = 2$   
ウェーブレット関数  
 $\psi_0 [1 \sim 4]$

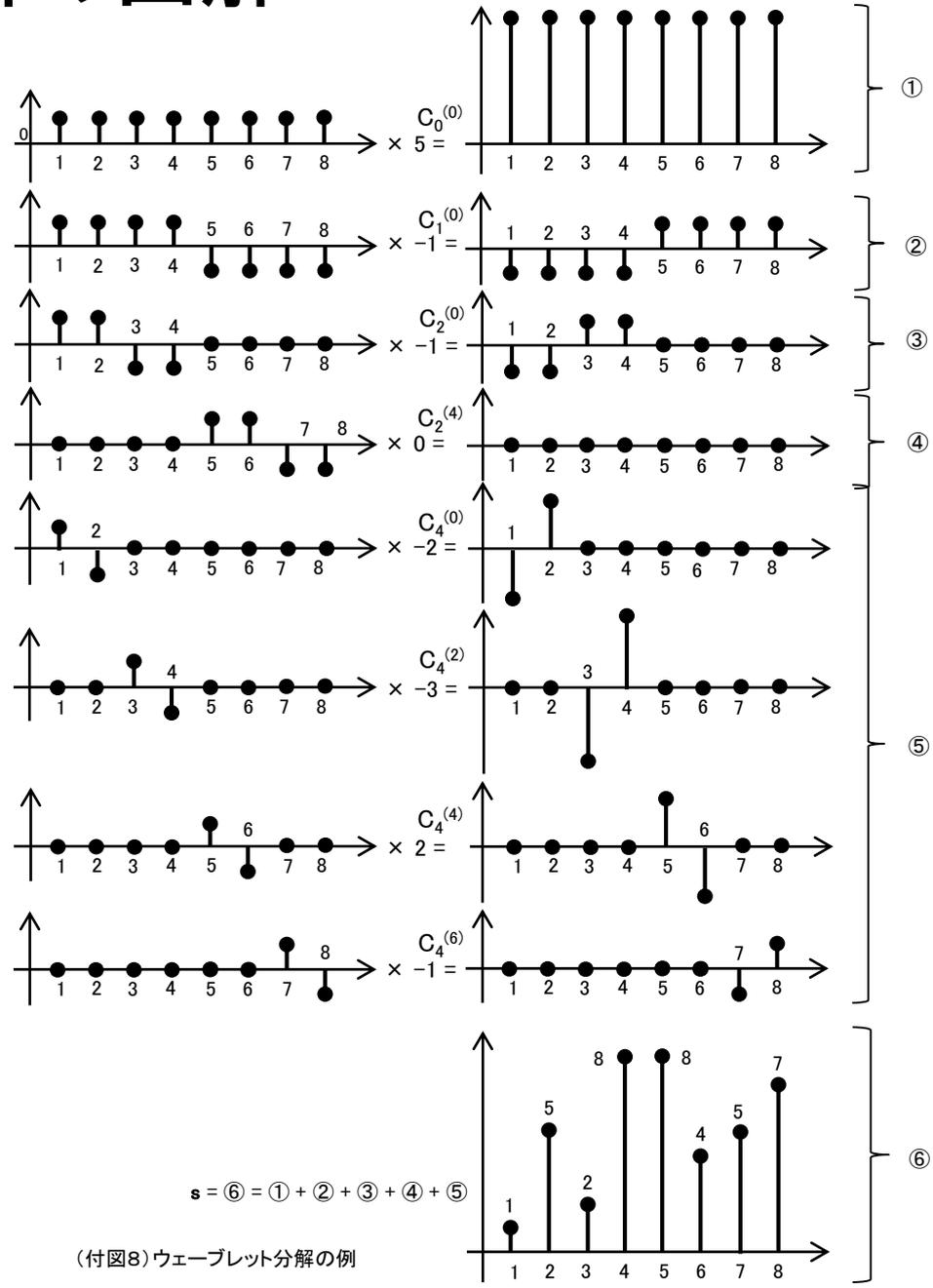
$\psi_0 [5 \sim 8]$

周波数 =  $2^2 = 4$   
ウェーブレット関数  
 $\psi_0 [1 \sim 2]$

$\psi_0 [3 \sim 4]$

$\psi_0 [5 \sim 6]$

$\psi_0 [7 \sim 8]$



(付図8) ウェーブレット分解の例

# 付録6. ウェーブレット分解と合成の計算の模式図

データ数 =  $2^3 = 8$  個を例に、ウェーブレットの分解と合成の計算プロセスを(付図9)で示す。

■分解の式(再掲載)

$$A_4^{(0)} = (s_1 + s_2)/2, A_4^{(2)} = (s_3 + s_4)/2, A_4^{(4)} = (s_5 + s_6)/2, A_4^{(6)} = (s_7 + s_8)/2, C_4^{(0)} = (s_1 - s_2)/2, C_4^{(2)} = (s_3 - s_4)/2, C_4^{(4)} = (s_5 - s_6)/2, C_4^{(6)} = (s_7 - s_8)/2 \dots \text{(式33)}$$

$$A_2^{(0)} = (A_4^{(0)} + A_4^{(2)})/2, A_2^{(4)} = (A_4^{(4)} + A_4^{(6)})/2, C_2^{(0)} = (A_4^{(0)} - A_4^{(2)})/2, C_2^{(4)} = (A_4^{(4)} - A_4^{(6)})/2 \dots \text{(式35)}$$

$$C_0^{(0)} = (A_2^{(0)} + A_2^{(4)})/2, C_1^{(0)} = (A_2^{(0)} - A_2^{(4)})/2 \dots \text{(式37)}$$

■合成の式(再掲載)

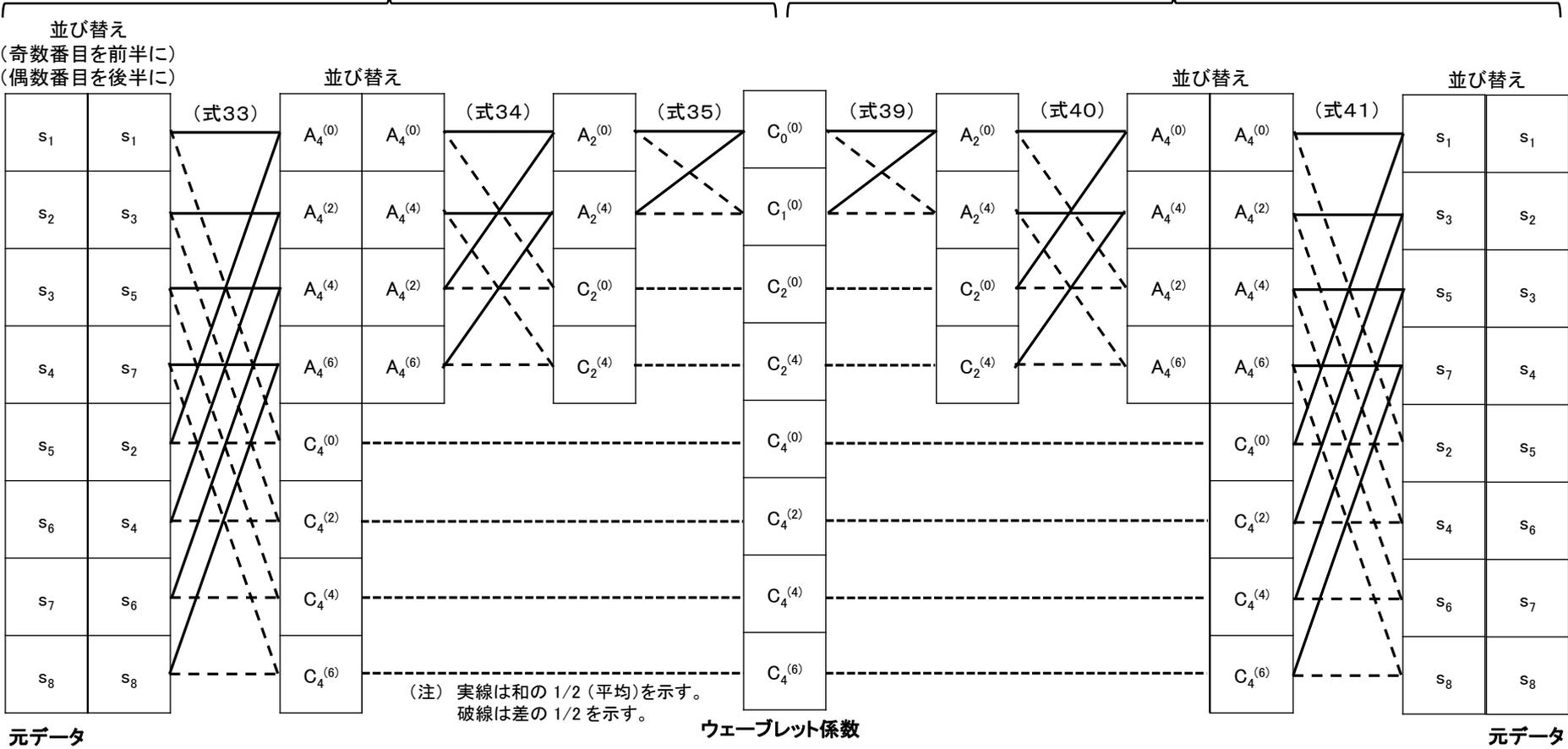
$$A_2^{(0)} = C_0^{(0)} + C_1^{(0)}, A_2^{(4)} = C_0^{(0)} - C_1^{(0)} \dots \text{(式39)}$$

$$A_4^{(0)} = A_2^{(0)} + C_2^{(0)}, A_4^{(2)} = A_2^{(0)} - C_2^{(0)}, A_4^{(4)} = A_2^{(4)} + C_2^{(4)}, A_4^{(6)} = A_2^{(4)} - C_2^{(4)} \dots \text{(式40)}$$

$$s_1 = A_4^{(0)} + C_4^{(0)}, s_2 = A_4^{(0)} - C_4^{(0)}, s_3 = A_4^{(2)} + C_4^{(2)}, s_4 = A_4^{(2)} - C_4^{(2)}, s_5 = A_4^{(4)} + C_4^{(4)}, s_6 = A_4^{(4)} - C_4^{(4)}, s_7 = A_4^{(6)} + C_4^{(6)}, s_8 = A_4^{(6)} - C_4^{(6)} \dots \text{(式41)}$$

分解のプロセス

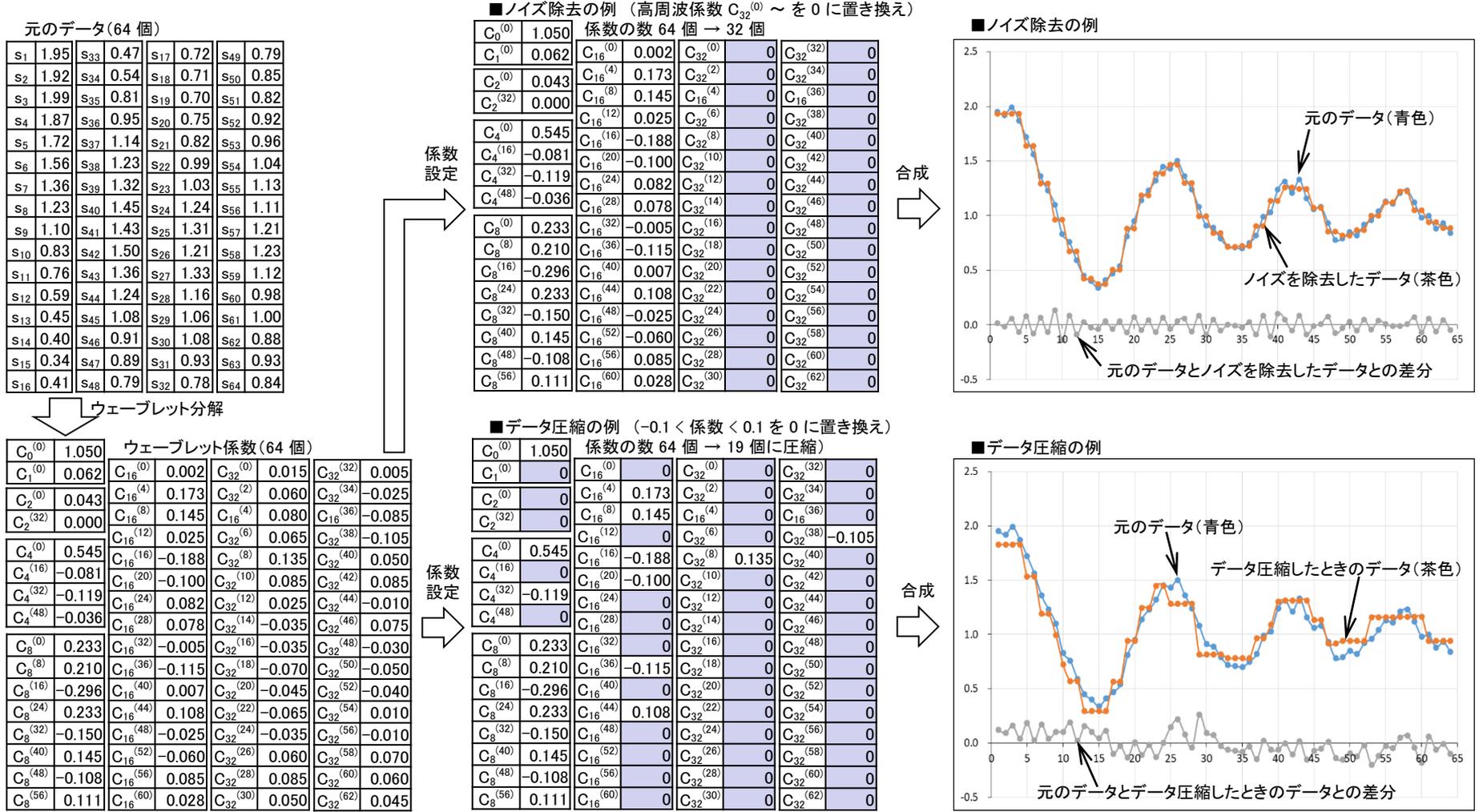
合成のプロセス



(付図9)ウェーブレット分解と合成の計算プロセス

# 付録7. ウェーブレット変換の活用事例

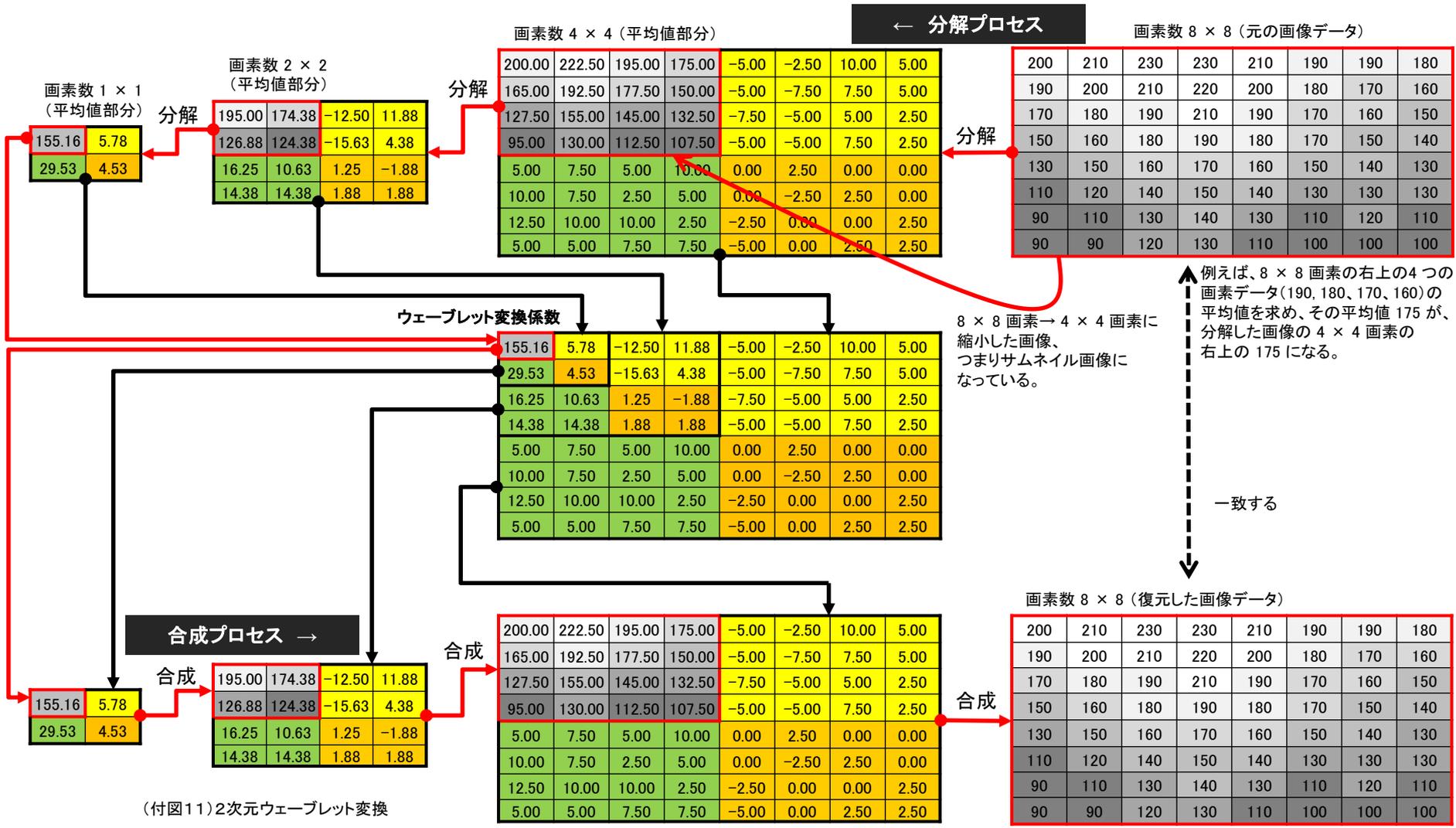
ウェーブレット合成のプロセスで、高周波のウェーブレット関数の係数を無視すれば、高周波ノイズが混入しているときノイズを除去することができる。また、ウェーブレット合成のプロセスで、値が小さいウェーブレット係数を使わないで済めば、使用する係数の数を減らすことができる。つまり、データを圧縮できる。ここでは、ウェーブレット変換の活用事例として、信号ノイズの除去とデータの圧縮を挙げる。振動数を変えながら減衰する正弦波から得られるデータ数 =  $2^6 = 64$  個のデータ列 =  $\{s_1, s_2, \dots, s_{64}\}$  を対象とする。付録6の計算プロセスに従い、まずデータをウェーブレット分解してウェーブレット係数を求める。次いで、データを復元するためにウェーブレット合成する。合成のプロセスでは、用途に応じて特定のウェーブレット関数の係数をここでは 0 に置き換えて合成する。



(付図10) ウェーブレット変換の信号処理への活用事例

# 付録8. 2次元ウェーブレット変換(分解と合成)の図解

8 × 8 画素データを対象にウェーブレットの分解と合成のプロセスを(付11)に示す。なお、画素データには粗いが濃淡を付けておいた。  
 分解は解像度を 1/2 ずつ落としていくプロセスである。初めに、8 × 8 画素のデータを 4 × 4 画素のデータに縮小する。縮小した画像は、元の画像の平均値を使用しているのでの濃淡パターンは元の画像の濃淡パターンに合致している(縮小画像は、サムネイル画像という)。合わせて、この平均値との差分を縦縞成分(黄色)、横縞成分(緑色)、そして格子縞成分(橙色)で表す。以降この処理を、平均値を表す画素が1画素になるまで繰り返す。このようにして、周波数 1(平均値)のスケーリング関数と、周波数 4, 周波数 2, そして周波数 1のウェーブレット関数の係数が求まる。なお、合成プロセスは分解プロセスの逆を辿る。



(付図11) 2次元ウェーブレット変換



# 付録10. パーセバルの定理 (Parseval theorem)

パーセバルの定理(パーセバルの等式)を(付式24)に示す。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ f(t) \}^2 dt = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} | F(\omega) |^2 d\omega \quad \dots \text{(付式24)}$$

但し、 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$     フーリエ変換

$f(t) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$     フーリエ逆変換

【証明】 この定理は以下の手順で確認できる。

$\int_{-\infty}^{\infty} \{ f(t) \}^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt$	
$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} dt$	片側の f(t) に f(t) のフーリエ逆変換の式を代入する。
$= 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right\} d\omega$	積分の順序を変更する(ωで積分してから t で積分を、t で積分してから ωで積分に変更する)。
$= 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega$	f(t) のフーリエ変換の式を F(-ω) に置き換える。
$= 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega$	F(-ω) を共役複素数 F*(ω) に置き換える(* は共役複素数であることを示す)。
$= 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty}   F(\omega)  ^2 d\omega$	F(ω)   は複素数の絶対値を表し、ノルムという。  F(ω)  ^2 = F(ω) F*(ω) が成り立つ。

パーセバルの等式(付式24)の左辺は、時間軸上での { f(t) }^2 がエネルギーを表すことから、その積分は全時間 t についてのエネルギーの総和になる。一方、パーセバルの式の右辺は、周波数軸上での | F(ω) |^2 が、周波数成分に分解したときの角周波数 ω の成分が持つエネルギーを表すことから、その積分は全周波数成分 ω についてのエネルギーの総和になる。

つまり、パーセバルの定理は、時間軸上でのエネルギーと周波数軸上でのエネルギーが等しいこと、単に見方を変えたに過ぎないことを表している。

なお、角周波数 ω の代わりに周波数 f = ω/(2π) を使用すると、パーセバルの定理は以下のように表される。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ f(t) \}^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} | F(f) |^2 df \quad \dots \text{(付式25)}$$

# 付録11. シュワルツの不等式 (Schwarz inequality)

シュワルツの不等式を(付式26)に示す。

$$\left\{ \int_a^b f(x) g(x) dx \right\}^2 \leq \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\} \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\} \quad \cdots \text{(付式26)}$$

【証明】 この不等式は以下の手順で確認できる。

$$A = \int_a^b f(x) g(x) dx, \quad B = \int_a^b f^2(x) dx, \quad C = \int_a^b g^2(x) dx \quad \text{とおくと、}$$

シュワルツの不等式(付式26)は、 $A^2 \leq B C$  …… (付式27) となり、これを証明することになる。

(式27)を確認するために、一般に、 $\int_a^b \{ t f(x) + g(x) \}^2 dx \geq 0$  が成り立つことを利用する。

この不等式の左辺を変形して、

$$\begin{aligned} \int_a^b \{ t f(x) + g(x) \}^2 dx &= \int_a^b \{ t^2 f^2(x) + 2 t f(x) g(x) + g^2(x) \} dx = t^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2 t \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \\ &= t^2 B + 2 t A + C \\ &= B t^2 + 2 A t + C \geq 0 \quad \cdots \text{(付式28)} \end{aligned}$$

まず、 $B = 0$  の場合は、 $B$  の定義より  $f(x) = 0$  となり、(付式28)は成立する。

よって、以下では、 $B \neq 0$  の場合を考える。

$B \neq 0$  の場合、(付式28)は  $t$  の2次関数に関する不等式であるので、2次関数の判別式を使えば、2次関数の判別式  $D \leq 0$  のときに(付式28)が成立していることが分かる。

つまり、 $D = (2 A)^2 - 4 B C \leq 0$  より、(付式27)が得られる。

# 付録12. ガウス関数の計算

## ■ガウス関数の積分

(付図14)のガウス関数  $f(t) = e^{-at^2}$  の積分の演算結果を(付式29)に示す。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\pi/a} \quad \dots \text{(付式29)}$$

ここで、 $a$  は正の定数  $a > 0$

【証明】(付式29)の積分の計算結果は以下の手順で確認できる。

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt \text{ とおくと、}$$

$$A^2 = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \quad \dots \text{(付式30)}$$

この積分は、微小面積  $dS = dx dy \dots \text{①}$  での  $e^{-(x^2+y^2)}$  総和になる。

ここで、 $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とおいて極座標変換する。

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots \text{② が成立する。}$$

積分範囲は $x, y$ とも  $-\infty \sim \infty$  と全空間なので、 $\theta$  は  $0 \sim 2\pi$ ,  $r$  は  $0 \sim \infty \dots \text{③}$  になる。

また、極座標系での微小面積は、(付図15)に示す通り、

$$dS = \pi(r + dr)^2 (d\theta / (2\pi)) - \pi r^2 (d\theta / (2\pi)) = r dr d\theta + (1/2)(dr)^2 d\theta$$

ここで、 $(dr)^2$  の項は他の項に比べて極めて小さいので無視できるので、 $dS = r dr d\theta \dots \text{④}$  となる。

①、②、③、④ を(付式30)に代入すると、

$$A^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr = 2\pi \left[ -1/(2a) \right] e^{-ar^2} \Big|_0^{\infty} = -\pi/a (0 - 1) = \pi/a$$

$A$  は正の値をとるので、 $A = \sqrt{\pi/a}$  となり、(付式29)が求まる。

また、(付式29)を  $a$  で微分すると、(付式31)が求まる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-at^2} dt = 1/2 \sqrt{\pi/a^3} \quad \dots \text{(付式31)}$$

## ■ガウス関数のフーリエ変換

ガウス関数  $f(t) = e^{-at^2}$  のフーリエ変換を行う。

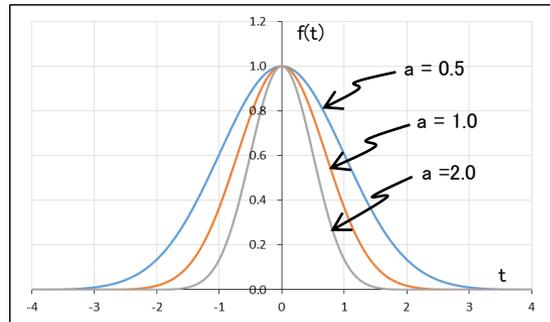
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t^2 + j\omega t/a)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + j\omega/(2a))^2 - \omega^2/(4a)} dt = e^{-\omega^2/(4a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + j\omega/(2a))^2} dt$$

ここで、 $\gamma = t + j\omega/(2a)$  とおけば、 $d\gamma = dt$  であるので、(付式29)を使って(付式32)が求まる。

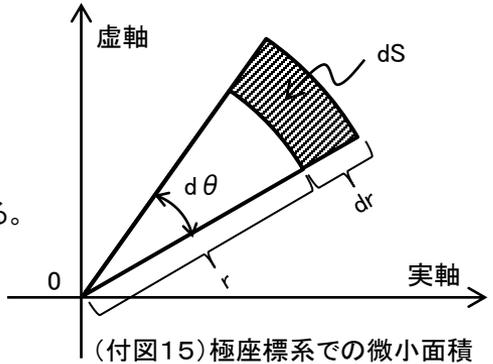
$$F(\omega) = e^{-\omega^2/(4a)} \int e^{-a\gamma^2} d\gamma = \sqrt{\pi/a} e^{-\omega^2/(4a)} \quad \dots \text{(付式32)}$$

(付式32)と、(付図14)、(付図16)から、以下のことが分かる。

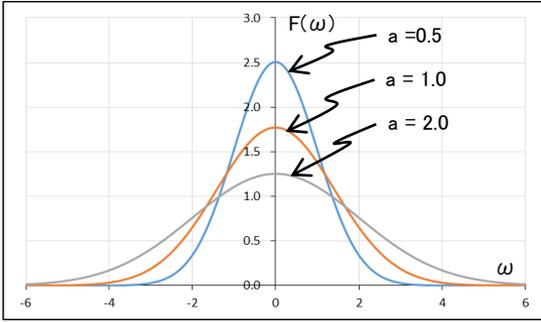
- 1) 時間領域でのガウス関数は、フーリエ変換した周波数領域でもガウス関数である。
- 2) 時間領域では  $f(x) = e^{-ax^2}$  であるので、分布の幅を狭くすれば(パラメータ  $a$  を大きくすれば)、逆に、周波数領域では  $F(\omega) = \sqrt{\pi/a} e^{-\omega^2/(4a)}$  であるので、分布の幅は広がる。



(付図14)ガウス関数(時間領域)



(付図15)極座標系での微小面積



(付図16)ガウス関数(周波数領域)

# 付録13. 射影定理 (Projection Theorem)

正規直交基底が存在するとき、任意の変数はこの基底を使用して表すことができるというのが、射影定理である。

任意の変数  $x$  の正規直交基底  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  への直交射影  $y$  は、(付式33)のように正規直交基底の線型結合で表すことができるはずである。(付図17)は直交射影のイメージである。

$$y = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \quad \dots \text{(付式33)}$$

ただし、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  は実数

一方、直交射影するにあたっては、次式の直交性の条件が成立する。

$$(x - y, v_i) = 0 \quad \text{但し、} (\cdot, \cdot) \text{ は内積を表す}$$

よって、

$$(x, v_i) = (y, v_i) \quad \dots \text{(付式34)}$$

(付式34)の右辺に(付式33)を代入して、 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  が正規直交基底であること、つまり、 $i=j$  のとき  $(v_i, v_j) = 1$ ,  $i \neq j$  のとき  $(v_i, v_j) = 0$  であることに注意すれば、

$$(y, v_i) = (\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j, v_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (v_j, v_i) = \lambda_i$$

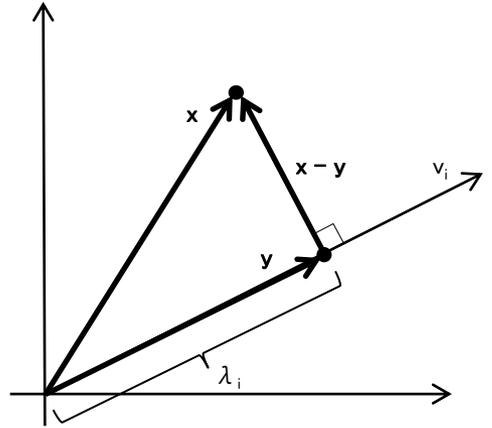
よって、(付式34)より、

$$\lambda_i = (x, v_i) \quad \text{ただし、} i = 1, 2, \dots, m$$

この式を(付式33)に代入して、直交射影  $y$  が求まる。

$$y = \sum_{j=1}^m (x, v_j) v_j \quad \dots \text{(付式35)}$$

(付式35)は、変数  $x$  と正規直交基底  $v_j$  との内積  $\lambda_j = (x, v_j)$  を係数とした正規直交基底  $v_j$  との積和が直交射影  $y$  になることを表している。いささか直感的な表現であるが、内積はベクトルの方向が似ていること�程度を表すものと言えるので、(付式35)は、変数  $x$  がそれぞれの正規直交基底の方向に似ている程度を計算し、それを正規直交基底ごとの射影の大きさとしたものが直交射影  $y$  になる、と捉えることができる。



(付図17)直交射影のイメージ

# 付録14. 射影定理に基づく多重解像度解析の解釈

ウェーブレットの分解と合成の一連のプロセスを近似式という視点で整理する。

(付録4)に示しているように、 $f(t)$  の近似式  $P_j(f(t))$  は(付録13)の射影定理を使い関数  $f(t)$  とスケーリング関数との内積で表すことができる(付式36)。

$$P_j(f(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j,k}^*(t) dt \right\} \phi_{j,k}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f(t), \phi_{j,k}(t)) \phi_{j,k}(t) \dots \text{(付式36)}$$

但し、 $(f(t), \phi_{j,k}(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j,k}^*(t) dt$  は、 $f(t)$  と  $\phi_{j,k}(t)$  の内積を表す。

ここで、解像度  $2^j$  の近似式  $P_j(f(t))$  と解像度  $2^{j+1}$  の近似式  $P_{j+1}(f(t))$  との差分を  $Q_j(f(t)) = P_{j+1}(f(t)) - P_j(f(t))$  で表す(解像度は  $2^j$  より  $2^{j+1}$  の方が高い)。この差分は(式36)では ④ + ② に相当し、関数  $f(t)$  とウェーブレット関数との内積で表すことができる(付式37)。

$$Q_j(f(t)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}^*(t) dt \right\} \psi_{j,k}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f(t), \psi_{j,k}(t)) \psi_{j,k}(t) \dots \text{(付式37)}$$

ここで、2進区間の  $j$  を固定して ( $j = J$ )、 $N > J$  の近似式の差分の関係を見ていく。

$$\begin{aligned} f(t) &= P_{N+1}(f(t)) + (f(t) - P_{N+1}(f(t))) = P_N(f(t)) + Q_N(f(t)) + (f(t) - P_{N+1}(f(t))) \\ &= (P_{N-1}(f(t)) + Q_{N-1}(f(t))) + Q_N(f(t)) + (f(t) - P_{N+1}(f(t))) \\ &= \dots = P_J(f(t)) + Q_J(f(t)) + Q_{J+1}(f(t)) + \dots + Q_N(f(t)) + (f(t) - P_{N+1}(f(t))) \end{aligned}$$

$P_{N+1}(f(t))$  は  $f(t)$  の近似式であり、 $f(t) - P_{N+1}(t) \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) が成り立つ。

よって、ハール・ウェーブレットによる多重解像度解析を表す(付式38)が得られる。

$$\begin{aligned} f(t) &= P_J(f(t)) + \sum_{j=J}^{\infty} Q_j(f(t)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f(t), \phi_{J,k}(t)) \phi_{J,k}(t) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f(t), \psi_{j,k}(t)) \psi_{j,k}(t) \dots \text{(付式38)} \end{aligned}$$

(付式38)は、解像度を  $2^J$  としたとき、2進区間は  $B_J$ (図3)となり、関数  $f(t)$  はこの2進区間での近似式であるスケーリング関数と、近似式の差分を表すウェーブレット関数群の和で表すことができることを示している。

# 参考にした書籍とURL

田原鉄也：「連続ウェーブレット変換の基礎」、The Institute of Electrical Engineers of Japan, VOL.129, No.10, 2009

三谷政昭：「フーリエ変換からウェーブレット変換へ やり直しのための通信数学」、CQ出版社

山下雄史(京都大学)：「短時間フーリエ変換と不確定性関係」、[【フーリエ解析】その15:短時間フーリエ変換と不確定性関係 - YouTube](#)

山下雄史(京都大学)：「ウェーブレット解析入門 その1～その4」、[山下雄史 ウェーブレット変換 - YouTube](#)

新井仁之(早稲田大学)：「フーリエキングダムとウェーブレット革命」、<https://www.youtube.com/watch?v=pUaHBpQGrX4>

新井仁之(早稲田大学)：「ウェーブレットへの誘い」、<https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=T44BSWMDtRc>

羽石秀昭(千葉大学)：「1次元ウェーブレット変換」、<http://www.cfme.chiba-u.jp/~haneishi/class/iyogazokougaku/Wavelet2.pdf>

伊藤彰則(東北大学)：「Wavelet 変換」、<http://www.spcom.ecei.tohoku.ac.jp/~aito/wavelet/slide.pdf>

Qiita Inc.：「はじめての多重解像度解析 その2 二次元画像の変換」、[はじめての多重解像度解析 その2 二次元画像の変換 - Qiita](#)

Fussy's Homepage：「ウェーブレット変換」、[圧縮アルゴリズム \(9\) ウェーブレット変換 -2- \(fc2.com\)](#)

みつきのチャンネル：[【第十九章】フーリエ変換でのパーシヴァルの等式【数学 フーリエ解析】 - YouTube](#)

桂田裕史(明治大学)：「内積空間ノート」、<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/functional-analysis-1.pdf>