

周波数解析(フーリエ解析) の基礎知識

2021年 ver. 1.0
倉谷 隆博

1. フーリエ級数 (Fourier series)

フーリエ解析は、時間や空間の現象を周波数領域の現象に置き換えて解析する手法であり、フーリエ級数とフーリエ変換で構成される。複雑な信号波形(データ)を周波数の異なる三角関数(波)の和に分解し、周波数ごとの波の大きさを求めることによって信号(データ)を解析するのがフーリエ解析である。

フーリエ解析の技術は、携帯電話の通話、ラジオ・TV 放送、データ通信、音声認識と合成、画像データの圧縮、結晶構造の解析などに、実に幅広く使用されている。

フーリエ解析の基盤技術はフーリエ級数であり、フーリエ級数の対象は周期関数である。**三角関数系の直交性という特徴(付録1)を活かして、任意の周期関数を異なる周波数の三角関数の和で表そうというアイデアがフーリエ級数の考え方である。**

■フーリエ級数の導出

T : 一定時間ごとに同じ波形が繰り返されると、この一定時間を周期といい T で表す(単位は時間)。

ω : 1秒間に変化する回転角を角周波数といい、 ω で表す。単位は rad/sec (radはラジアン)。

特に、周期 T で1回転(2π ラジアン回転)する場合の角周波数 ω を基本角周波数と呼び ω_0 で表す。 $\omega_0 T = 2\pi$ より、 $\omega_0 = 2\pi/T$ で表される。

有限区間 $-T/2 \leq t \leq T/2$ で定義される周期関数 $f(t)$ を、(式1)で示すように、種々の周波数を持つ \cos 波と \sin 波の和で表そうとするのが、フーリエ級数である。(式1)がフーリエ級数の式である。なお、(式1)の周波数を角周波数に置き換えたのが(式2)の形式の**フーリエ級数**である。

フーリエ級数では、周波数ごとに \cos 波と \sin 波の大きさを表す係数(**フーリエ係数**)を求める必要がある。これらの係数 a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) は、下記の(1)、(2)、(3)に示す方法で求めることができる。つまり、(式2)の係数は(式3)、(式4)、(式5)で求めることができる。

(付録2)にフーリエ級数の計算例を示す。

$$\text{有限区間 } -T/2 \leq t \leq T/2 \text{ で、 } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos(2n\pi t/T) + b_n \sin(2n\pi t/T) \} \quad \dots \text{ (式1)}$$

$$\text{(式1)で、} \omega_0 = 2\pi/T \text{ とおくと、 } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \} \quad \dots \text{ (式2)}$$

(1) (式2)の両辺に $\cos(n\omega_0 t)$ を掛けて、両辺を区間 $-T/2 \leq t \leq T/2$ で積分する(演算は、付録1の下段、三角関数の積の積分を参照のこと)。

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ a_m \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt + b_m \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \right\} = a_n T/2$$

$$\text{よって、 } a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \dots \text{ (式3)}$$

(2) (式2)の両辺に $\sin(n\omega_0 t)$ を掛けて、両辺を区間 $-T/2 \leq t \leq T/2$ で積分する。

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ a_m \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt + b_m \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt \right\} = b_n T/2$$

$$\text{よって、 } b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad \dots \text{ (式4)}$$

(3) (式2)の両辺を区間 $-T/2 \leq t \leq T/2$ で積分する。

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt + b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt \right\} = a_0 T$$

$$\text{よって、 } a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad \dots \text{ (式5)}$$

2. 複素フーリエ級数 (Complex Fourier series)

指数関数を複素数全体に拡張した複素指数関数の直交性(付録1)を使って、**フーリエ級数の三角関数表現を複素指数関数表現に置き換えることができる。これによって簡素な表現が可能になる。**有限区間 $-T/2 \leq t \leq T/2$ で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ級数を複素フーリエ級数に拡張する。

■複素フーリエ級数の導出

新たに、(式6)で定義する c_n に対して、 n を $-n$ で置き換える c_{-n} (式7)を新たに導入して、フーリエ級数の係数(式3)、(式4)、(式5)を書き直す。

$$c_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \cdots \text{ (式6)} \qquad c_{-n} = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \quad \cdots \text{ (式7)}$$

$n \geq 1$ のとき、(式3)より、

$$a_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) / 2 dt = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} dt + 1/T \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = c_{-n} + c_n \quad \cdots \text{ (式8)}$$

$n \geq 1$ のとき、(式4)より、

$$b_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) / (2j) dt = -j/T \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} dt + j/T \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = -j c_{-n} + j c_n = -j (c_{-n} - c_n) \quad \cdots \text{ (式9)}$$

$n = 0$ のとき、(式5)より、

$$a_0 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^0 dt = c_0 \quad \cdots \text{ (式10)}$$

(式2)に(式8)、(式9)、(式10)を代入し、更に、三角関数を複素指数関数に置き換えて(付録1のオイラーの公式)、

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos (n\omega_0 t) + b_n \sin (n\omega_0 t) \} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (c_{-n} + c_n) (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) / 2 - j (c_{-n} - c_n) (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) / (2j) \} \\ &= c_0 + 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + c_n e^{jn\omega_0 t} + c_n e^{-jn\omega_0 t} - c_{-n} e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + c_n e^{jn\omega_0 t} - c_n e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= c_0 + 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} 2 (c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + c_n e^{jn\omega_0 t}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \cdots \text{ (式11)} \end{aligned}$$

(式6)と(式11)が**複素フーリエ級数の公式**である。基本角周波数 ω_0 を使用した複素指数関数 $e^{jn\omega_0 t}$ を導入することで、フーリエ級数の式を(式11)のように簡素化できる。複素フーリエ級数では角周波数 $n\omega_0$ は離散値をとり、この角周波数に対応した c_n (離散値)を**離散スペクトル**と呼ぶ。係数 c_n を求めることを、関数 $f(t)$ のスペクトルを調べるとか、関数 $f(t)$ をスペクトルに分解するという。(付録3)にフーリエ級数と複素フーリエ級数を比較しておく。

ここで、(式11)のフーリエ係数が、複素指数関数の関数セットから算出できることを確認しておく。つまり、複素指数関数の関数セットが直交基底を構成していることを確認しておく。(式11)の両辺の右側から $e^{-jn\omega_0 t}$ を掛け、区間 $-T/2 \leq t \leq T/2$ で積分する。(付録1)の共役複素数の積の積分の結果を使用して、

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} (\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t}) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} (\cdots + c_n e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} + \cdots + c_m e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} + \cdots) dt = c_n T$$

よって、 $c_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ (式6)となり、複素指数関数の関数セットを使用して(式11)のフーリエ係数が全て定まる。

(式11)は直交する関数の1次結合式であるので、複素指数関数の関数セットは直交基底を構成していると言える。

3. フーリエ変換 (Fourier Transform) と逆フーリエ変換

周期関数が対象であるフーリエ級数の考え方を、非周期関数へと拡大するのがフーリエ変換である。周期関数 $f(t)$ の周期 T を無限大 ($T \rightarrow \infty$) にすることで、関数 $f(t)$ を非周期関数として扱う。フーリエ変換によって、周期関数でなくてもフーリエ解析ができるようになる。
(付録4)にフーリエ変換の計算例を載せておく。また、(表1)に複素フーリエ級数とフーリエ変換の比較を示す。

■フーリエ変換の導出

(式11)に(式6)を代入する。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \quad \cdots \text{(式12)}$$

ω_n と $\Delta \omega$ を下式で定義する。

$$\omega_n = n\omega_0 = n(2\pi/T) = 2n\pi/T \quad \cdots \text{(式13)} \qquad \Delta \omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi/T \quad \cdots \text{(式14)}$$

ω_n と $\Delta \omega$ を(式12)に代入する。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \right] e^{j\omega_n t} \Delta \omega$$

ここで、 $G(\omega_n) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \right] e^{j\omega_n t}$ と置くと、 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n) \Delta \omega$ と表すことができる。

フーリエ変換では非周期関数を対象とする。そこで、 $f(t)$ を非周期関数にするために周期 T を無限大 ($T \rightarrow \infty$) にする。周期 T を無限大にすると(式14)より $\Delta \omega \rightarrow 0$ である。ここで、区分求積法による積分の考え方を使うと、

$$f(t) = \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n) \Delta \omega \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$$

この式で、 $G(\omega)$ を元に戻す。元に戻すにあたって、 $G(\omega)$ を求める積分区間は $-\infty$ から ∞ になる。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

ここで、 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \cdots \text{(式15)}$ と置くと、 $f(t)$ は $F(\omega)$ を使用して(式16)で表すことができる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \cdots \text{(式16)}$$

(式15)をフーリエ変換、(式16)を逆フーリエ変換と呼ぶ。(表1)複素フーリエ級数とフーリエ変換の比較

(注)フーリエ変換が可能な関数 $f(t)$ の条件は、
関数 $f(t)$ の絶対値 $|f(t)|$ の積分 $\int |f(t)| dt$ が収束することである。
このとき、関数 $f(t)$ は、その絶対値が積分可能であるという意味で絶対可積分であるという。
関数 $f(\pm \infty) = 0$ が成立する。

	複素フーリエ級数	フーリエ変換
対象関数	$f(t)$ は周期関数 周期: T 基本角周波数: $\omega_0 = 2\pi/T$	$f(t)$ は非周期関数
近似式 (時間領域)	複素フーリエ級数 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ ここで、角周波数 $n\omega_0$ は離散的な値	逆フーリエ変換 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ ここで、角周波数 ω は連続的な値
近似式の係数 (周波数領域)	複素フーリエ係数 $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$	フーリエ変換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
フーリエ近似式の説明	基本角周波数 $\omega_0 = 2\pi/T$ として、角周波数 $n\omega_0$ (離散的な値) の三角関数の波 (複素指数関数) の和で関数 $f(t)$ を近似する。	角周波数 ω (連続的な値) の三角関数の波 (複素指数関数) の和で関数 $f(t)$ を近似する。

4. 離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform)

コンピュータ処理を可能にするためには離散データの扱い必要になる。時間領域の離散的なデータを周波数領域の三角関数(直交基底)の和で近似するのが離散フーリエ変換である。フーリエ変換では積分の計算が必要になるが、離散フーリエ変換は積分の代わりに総和を用いる計算方法である。(付録5)に計算例を載せる。

■離散フーリエ変換の導出

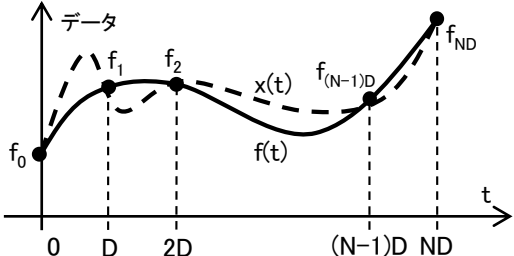
(図1)に示すように、関数 $f(t)$ (実線)を関数 $x(t)$ (破線)で近似する方法を考える。関数 $f(t)$ を時間区間 T の間に時間間隔(サンプリング周期) D ごとに N 回計測(サンプリング)する。よって、 $T = ND$ が成立する。ここでサンプリング値を、 $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(D)$, $f_2 = f(2D)$, \dots , $f_{N-1} = f((N-1)D)$ とする。関数 $x(t)$ は所定の計測時刻で必ずこの関数 $f(t)$ の計測値と一致するという条件の下で関数 $f(t)$ に関数 $x(t)$ を近似させる。この条件は(式18) $f_0 = x(0)$, $f_1 = x(D)$, $f_2 = x(2D)$, \dots , $f_{N-1} = x((N-1)D)$ で表すことができる。 $x(t)$ としては複素指数関数(三角関数) N 個の和を用意する(式17)。また、 $w = e^{-j2\pi/N}$ と置く。よって、例えば、 $w^{2 \times 3} = w^6 = e^{6(-j2\pi/N)}$ となる。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \{2\pi/(ND)\} t} \quad \dots \text{ (式17)}$$

$$f_n = x((nD)) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \{2\pi/(ND)\} nD} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(2\pi/N)kn} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k w^{-kn} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad \dots \text{ (式18)}$$

この式を、行列で表すと、

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^{-00} & w^{-10} & w^{-20} & \dots & w^{-(N-1)0} \\ w^{-01} & w^{-11} & w^{-21} & \dots & w^{-(N-1)1} \\ w^{-02} & w^{-12} & w^{-22} & \dots & w^{-(N-1)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{-0(N-1)} & w^{-1(N-1)} & w^{-2(N-1)} & \dots & w^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (式19)}$$



(図1) 2つの関数の関係

ここで、(付式19)の w^{-ij} ($i, j = 0, 1, \dots, N-1$)を要素とする行列(行列 A)の転置行列を作る。更に行列 A の要素を共役複素数にした行列(行列 B)を作り、この行列 B を(式19)の両辺の左側から掛ける。演算では下記に示す特性を使って(式20)が求まる。この式を**離散フーリエ変換**という。時間領域のサンプリングデータ($f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}$)から、周波数領域の複素指数関数の係数(周波数スペクトル)($a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$)を求めるのが離散フーリエ変換である。ちなみに、(式19)を**逆離散フーリエ変換**という。

- $w^{-00}, w^{-10}, w^{-20}, \dots, w^{-(N-1)0}, w^{-01}, w^{-02}, \dots, w^{-0(N-1)} = e^0 = 1$ • 対角要素は、 $1 \cdot 1 + w^{11}w^{-11} + w^{22}w^{-22} + \dots + w^{(N-1)(N-1)}w^{-(N-1)(N-1)} = N$
- 対角要素以外の要素は、例えば行列 B と行列 A を掛けてできる行列の例えば、2 行 3 列目の要素は、
 $1 \cdot 1 + w^{11} \cdot w^{-21} + w^{12} \cdot w^{-22} + \dots + w^{1(N-1)} \cdot w^{-2(N-1)} = 1 + w^{-11} + w^{-12} + \dots + w^{-1(N-1)} = 0$ (付録9、複素平面の単位円上に均等配置した点のベクトルの総和は 0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{11} & w^{12} & \dots & w^{1(N-1)} \\ 1 & w^{21} & w^{22} & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1)1} & w^{(N-1)2} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{11} & w^{12} & \dots & w^{1(N-1)} \\ 1 & w^{21} & w^{22} & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1)1} & w^{(N-1)2} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-11} & w^{-12} & \dots & w^{-(N-1)1} \\ 1 & w^{-12} & w^{-22} & \dots & w^{-(N-1)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{-(N-1)1} & w^{-(N-1)2} & \dots & w^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}$$

この式から、複素指数関数の係数(フーリエ係数)を求める離散フーリエ変換の(式20)が求まる。

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = 1/N \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{11} & w^{12} & \dots & w^{1(N-1)} \\ 1 & w^{21} & w^{22} & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{(N-1)1} & w^{(N-1)2} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = 1/N \begin{bmatrix} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} \\ f_0 + f_1 w^{11} + f_2 w^{12} + \dots + f_{N-1} w^{1(N-1)} \\ f_0 + f_1 w^{21} + f_2 w^{22} + \dots + f_{N-1} w^{2(N-1)} \\ \vdots \\ f_0 + f_1 w^{(N-1)1} + f_2 w^{(N-1)2} + \dots + f_{N-1} w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (式20)}$$

(式20)は、(式21)のように表すこともできる。

$$a_n = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{kn} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad \dots \text{ (式21)}$$

なお、(式20)を(式22)のように書き換えて表すこともある。

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (式22)}$$

5. 離散コサイン変換 (Discrete Cosine Transform)

離散フーリエ変換 (DCT) は複素指数関数を導入しているため計算量が多くなる。そこで離散フーリエ変換の基底関数として複素指数関数 (cos 関数と sin 関数) を使うのではなく、**基底関数として偶関数の cos 関数だけを使い計算量を減らそうというのが離散コサイン変換である。**

■ 離散コサイン変換の導出

関数 $f(t)$ を関数 $x(t)$ を使って近似する方法を考える。T を時間区間、N を時間区間内のサンプリング回数、 $D = T/N$ をサンプリング間隔とする。離散コサイン変換では級数和で、奇関数である sin 関数を相殺させ、偶関数である cos 関数だけを残すようにする。そのために、①時刻 0 のサンプリングをなくす。サンプリング時刻を $D/2$ ずらして、 $D/2, 3D/2, \dots, (2N-1)D/2$ とする。②その上で離散データを時間軸の負側に反転転写させる。このような工夫で、偶関数である cos 関数だけを使用するフーリエ変換の (式23) を作る。なお、サンプリング時刻での離散データ $f(t)$ を $x(t)$ と一致させる (式24)。計算例を (付録6) に載せる。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cos \{ k \pi / (ND) \} t \quad \dots \text{ (式23)}$$

$$f_n = x((2n+1)D/2) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cos \{ (\pi / ND) k (2n+1)D/2 \} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cos \{ k(2n+1) \pi / (2N) \} = c_0 + c_1 \cos \{ 1(2n+1) \pi / (2N) \} + \dots + c_{N-1} \cos \{ (N-1)(2n+1) \pi / (2N) \} \quad \dots \text{ (式24)}$$

(式24)を行列で表すと、

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos 1(1 \pi / 2N) & \dots & \cos (N-1)(1 \pi / 2N) \\ 1 & \cos 1(3 \pi / 2N) & \dots & \cos (N-1)(3 \pi / 2N) \\ 1 & \cos 1(5 \pi / 2N) & \dots & \cos (N-1)(5 \pi / 2N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos 1((2N-1) \pi / 2N) & \dots & \cos (N-1)((2N-1) \pi / 2N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (式25)}$$

(式25)の係数行列の転置行列を (式25)の両辺の左側から掛ける。... ① このとき、(式25)の右辺の係数行列は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos 1(1 \pi / 2N) & \cos 1(3 \pi / 2N) & \dots & \cos 1((2N-1) \pi / 2N) \\ \cos 2(1 \pi / 2N) & \cos 2(3 \pi / 2N) & \dots & \cos 2((2N-1) \pi / 2N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos (N-1)(1 \pi / 2N) & \cos (N-1)(3 \pi / 2N) & \dots & \cos (N-1)((2N-1) \pi / 2N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos 1(1 \pi / 2N) & \dots & \cos (N-1)(1 \pi / 2N) \\ 1 & \cos 1(3 \pi / 2N) & \dots & \cos (N-1)(3 \pi / 2N) \\ 1 & \cos 1(5 \pi / 2N) & \dots & \cos (N-1)(5 \pi / 2N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos 1((2N-1) \pi / 2N) & \dots & \cos (N-1)((2N-1) \pi / 2N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N/2 \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (式26)}$$

ここで、例えば、左辺左側の行列の 2 行目と右側の行列の 2 列目の積 (1行1列目以外の対角行列の値) は、

$$\cos \{ 1(1 \pi / 2N) \} \cos \{ 1(1 \pi / 2N) \} = 1/2 [\cos \{ 1(1 \pi / 2N) + 1(1 \pi / 2N) \} + \cos \{ 1(1 \pi / 2N) - 1(1 \pi / 2N) \}] = 1/2 [\cos 1(1 \pi / 2N) + 1] \text{ などから、}$$

$$\text{積の値は、} 1/2 [\cos 1(1 \pi / 2N) + 1] + [\cos 1(3 \pi / 2N) + 1] + \dots + [\cos 1((2N-1) \pi / 2N) + 1] = N/2 \quad (\text{参考、付録9の(1)回転因子})$$

また、例えば、左辺左側の行列の 3 行目と右側の行列の 2 列目の積 (対角行列以外の値) は、

$$\cos \{ 2(1 \pi / 2N) \} \cos \{ 1(1 \pi / 2N) \} = 1/2 [\cos \{ 2(1 \pi / 2N) + 1(1 \pi / 2N) \} + \cos \{ 2(1 \pi / 2N) - 1(1 \pi / 2N) \}] = 1/2 [\cos 3(1 \pi / 2N) + \cos 1(1 \pi / 2N)] \text{ などから、}$$

$$\text{積の値は、} [\cos 1(1 \pi / 2N) + \cos 1(3 \pi / 2N) + \dots + \cos 1((2N-1) \pi / 2N)] + [\cos 3(1 \pi / 2N) + \cos 3(3 \pi / 2N) + \dots + \cos 3((2N-1) \pi / 2N)] = 0$$

更に、①の式に、(式26)で求めた行列の逆行列 (下左の行列) を両辺の左側から掛ける。結果として、(式23)の係数 c_k が求まる。

$$\begin{bmatrix} 1/N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2/N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2/N & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2/N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/N & 1/N & \dots & 1/N \\ 2/N \cos (1 \cdot 1 \pi / 2N) & 2/N \cos (1 \cdot 3 \pi / 2N) & \dots & 2/N \cos (1(2N-1) \pi / 2N) \\ 2/N \cos (2 \cdot 1 \pi / 2N) & 2/N \cos (2 \cdot 3 \pi / 2N) & \dots & 2/N \cos (2(2N-1) \pi / 2N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2/N \cos ((N-1) \cdot 1 \pi / 2N) & 2/N \cos ((N-1) \cdot 3 \pi / 2N) & \dots & 2/N \cos ((N-1)(2N-1) \pi / 2N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{よって、} n = 0 \text{ のとき、} c_0 = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f_k \quad n = 1, \dots, N-1 \text{ のとき、} c_n = (2/N) \sum_{k=0}^{N-1} \cos (n(2k+1) \pi / 2N) f_k \quad \dots \text{ (式27)}$$

(式27)、(式28)を離散コサイン変換、(付式24)、(式25)を逆離散コサイン変換という。

6. 2次元離散コサイン変換

2次元離散コサイン変換は、静止画像の圧縮形式の1つであるJPEG(Joint Photographic Experts Group)に活用されている。グレースケールの画像を対象に画像を8画素×8画素のブロックに分割し、各ブロックに対して画像圧縮を行う(グレースケールでは、黒色は255(16進数でFFF)、白色は0)。計算例を付録7に載せる。

■2次元離散コサイン変換

(式28)を2次元に拡張した(式29)が2次元離散コサイン変換の式である。(式28)は時間領域のフーリエ変換であるが、(式29)は空間領域のフーリエ変換になる。

$$F(u, v) = 2 \cdot c(u) \cdot c(v) / 8 \cdot \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 \{ \cos \{ u(2x+1)\pi / (2 \cdot 8) \} \{ \cos \{ v(2y+1)\pi / (2 \cdot 8) \} f(x, y) \} \cdots \text{(式29)}$$

但し、 $c(0) = 1/\sqrt{2}$, $c(1) = c(2) = \cdots c(7) = 1$

ここで、 x, y : 8画素×8画素のブロックの中での位置、 x は横方向の座標 $x = 0, 1, \cdots, 7$ y は縦方向の座標 $y = 0, 1, \cdots, 7$

$f(x, y)$: 座標 (x, y) の画素データ $(0, 1, \cdots, 255)$ $F(u, v)$: 2次元離散コサイン変換の係数 $(u, v = 0, 1, \cdots, 7)$

例えば、 $F(2,5)$ を求める式は以下になる。

$$\begin{aligned} F(2, 5) = & 2/8 \cos(2 \cdot 1 \cdot \pi / 16) \{ (\cos(5 \cdot 1 \cdot \pi / 16)) f(0, 0) + (\cos(5 \cdot 3 \cdot \pi / 16)) f(0, 1) + (\cos(5 \cdot 5 \cdot \pi / 16)) f(0, 2) + \cdots + (\cos(5 \cdot 15 \cdot \pi / 16)) f(0, 7) \} \\ & + 2/8 \cos(2 \cdot 3 \cdot \pi / 16) \{ (\cos(5 \cdot 1 \cdot \pi / 16)) f(1, 0) + (\cos(5 \cdot 3 \cdot \pi / 16)) f(1, 1) + (\cos(5 \cdot 5 \cdot \pi / 16)) f(1, 2) + \cdots + (\cos(5 \cdot 15 \cdot \pi / 16)) f(1, 7) \} \\ & + \cdots \\ & + 2/8 \cos(2 \cdot 15 \cdot \pi / 16) \{ (\cos(5 \cdot 1 \cdot \pi / 16)) f(7, 0) + (\cos(5 \cdot 3 \cdot \pi / 16)) f(7, 1) + (\cos(5 \cdot 5 \cdot \pi / 16)) f(7, 2) + \cdots + (\cos(5 \cdot 15 \cdot \pi / 16)) f(7, 7) \} \end{aligned}$$

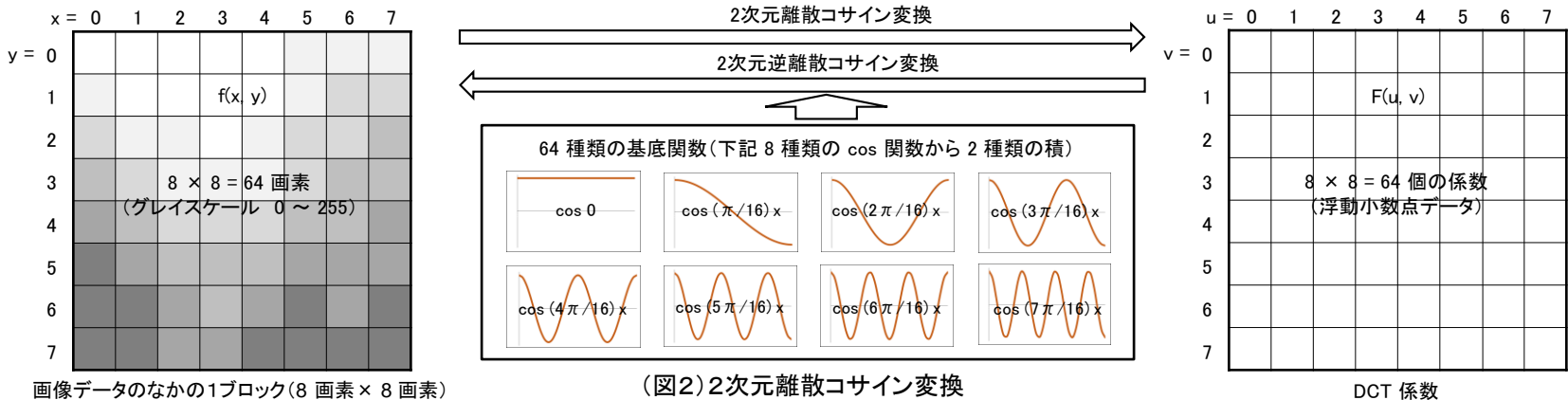
■2次元逆離散コサイン変換

(式24)を2次元に拡張した(式30)が2次元逆離散コサイン変換の式である。(式30)の \cos 関数は x 方向に関して(y 方向に関して同じ)、 $\cos(0 \cdot \pi / 16) x$, $\cos(1 \cdot \pi / 16) x, \cdots, \cos(7 \cdot \pi / 16) x$, の8種類に集約することができ、(式30)はこれらの \cos 関数の中から選んだ2つの \cos 関数の積(64種類)を基底とする式になっている。基底関数に DCT 係数である $F(u, v)$ を掛け、総和を求めて元の画素のデータ $f(x, y)$ に戻すことができる(図2)。

$$f(x, y) = 2/8 \cdot \sum_{u=0}^7 \sum_{v=0}^7 c(u) \cdot c(v) \{ \cos \{ u(2x+1)\pi / (2 \cdot 8) \} \{ \cos \{ v(2y+1)\pi / (2 \cdot 8) \} F(u, v) \} \cdots \text{(式30)}$$

例えば、 $f(2,5)$ を求める式は以下になる。

$$\begin{aligned} f(2, 5) = & (2/8) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(0 \cdot 5 \cdot \pi / 16) \{ (1/\sqrt{2}) (\cos(0 \cdot 11 \cdot \pi / 16)) F(0, 0) + (\cos(1 \cdot 11 \cdot \pi / 16)) F(0, 1) + \cdots + (\cos(7 \cdot 11 \cdot \pi / 16)) F(0, 7) \} \\ & + (2/8) \cos(1 \cdot 5 \cdot \pi / 16) \{ (1/\sqrt{2}) (\cos(0 \cdot 11 \cdot \pi / 16)) F(1, 0) + (\cos(1 \cdot 11 \cdot \pi / 16)) F(1, 1) + \cdots + (\cos(7 \cdot 11 \cdot \pi / 16)) F(1, 7) \} \\ & + \cdots \\ & + (2/8) \cos(7 \cdot 5 \cdot \pi / 16) \{ (1/\sqrt{2}) (\cos(0 \cdot 11 \cdot \pi / 16)) F(7, 0) + (\cos(1 \cdot 11 \cdot \pi / 16)) F(7, 1) + \cdots + (\cos(7 \cdot 11 \cdot \pi / 16)) F(7, 7) \} \end{aligned}$$



7. 高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform)

(式21)に示す離散フーリエ変換(DFT)は掛け算回数が多く、サンプリングデータ数が多くなると、計算時間は急激に増大する。(式21)をそのまま計算で使うのは現実的でない。そこで提案されたのが、**計算時間の圧倒的短縮を可能にする高速フーリエ変換(FFT)**である。但し、データ数は2のべき乗個にしておく。

■高速フーリエ変換の導出

FFT にはフーリエ変換前の時間データを並び替える「**時間間引き型**」と、フーリエ変換した値を並び替える「**周波数間引き型**」がある。ここでは「時間間引き型」を扱う。FFT 演算の特徴は、サンプリングデータを偶数番目のデータと奇数番目データに2分割して DFT の演算を繰り返すことである。

- そのため、データ数 N は、2 のべき乗数にしておく(例えば、 $N = 2^{10} = 1024$)。
- DFT の(式21)の係数 $1/N$ を以下の式では省略する。
- 回転因子(付録9)の周期性を表すサンプリング数 N は明示する。例えば、 $w_N = e^{-j2\pi/N}$ のように表す。

以下、DFT の式を使用して FFT の式を導く。

DFT の(式21)は、偶数項の DFT と奇数項の DFT に2分割して(式31)のように表すことができる。

$$a_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{(-j2\pi/N)kn} = \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} f_{2r} e^{(-j2\pi/N)2rk}}_{\text{偶数番目のデータを対象としたDFT}} + \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} f_{(2r+1)} e^{(-j2\pi/N)(2r+1)k}}_{\text{奇数番目のデータを対象としたDFT}} = \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} f_{2r} e^{[-j2\pi/(N/2)]rk}}_{\text{偶数番目のデータを対象としたDFT}} + \underbrace{e^{(-j2\pi/N)k} \sum_{r=0}^{N/2-1} f_{(2r+1)} e^{[-j2\pi/(N/2)]rk}}_{\text{奇数番目のデータを対象としたDFT}} \quad \dots \text{ (式31)}$$

また、回転因子に関して以下の式が導かれる。

$$w_N^{(k+N/2)} = e^{(-j2\pi/N)(k+N/2)} = e^{(-j2\pi/N)k} e^{-j\pi} = -e^{(-j2\pi/N)k} = -w_N^k$$
$$w_{N/2}^{(k+N/2)} = e^{[-j2\pi/(N/2)](k+N/2)} = e^{[-j2\pi/(N/2)]k} e^{-j2\pi} = -e^{[-j2\pi/(N/2)]k} = -w_{N/2}^k$$

そこで、 $k = 0, 1, \dots, N/2-1$ とすると、

$$a_0, a_1, \dots, a_{N/2-1} : \quad a_k = \sum_{r=0}^{N/2-1} f_{2r} w_{N/2}^{rk} + w_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} f_{(2r+1)} w_{N/2}^{rk} \quad \dots \text{ (式32)}$$

$$a_{N/2}, a_{N/2+1}, \dots, a_{N-1} : \quad a_{k+N/2} = \sum_{r=0}^{N/2-1} f_{2r} w_{N/2}^{r(k+N/2)} + w_N^{(k+N/2)} \sum_{r=0}^{N/2-1} f_{(2r+1)} w_{N/2}^{r(k+N/2)} = \sum_{r=0}^{N/2-1} f_{2r} w_{N/2}^{rk} - w_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} f_{(2r+1)} w_{N/2}^{rk} \quad \dots \text{ (式33)}$$

(式32)と(式33)において、 $\sum_{r=0}^{N/2-1} f_{2r} w_{N/2}^{rk}$ は偶数番目の

データ $N/2$ 個の DFT であり、 $\sum_{r=0}^{N/2-1} f_{(2r+1)} w_{N/2}^{rk}$ は奇数番目のデータ $N/2$ 個の DFT である。

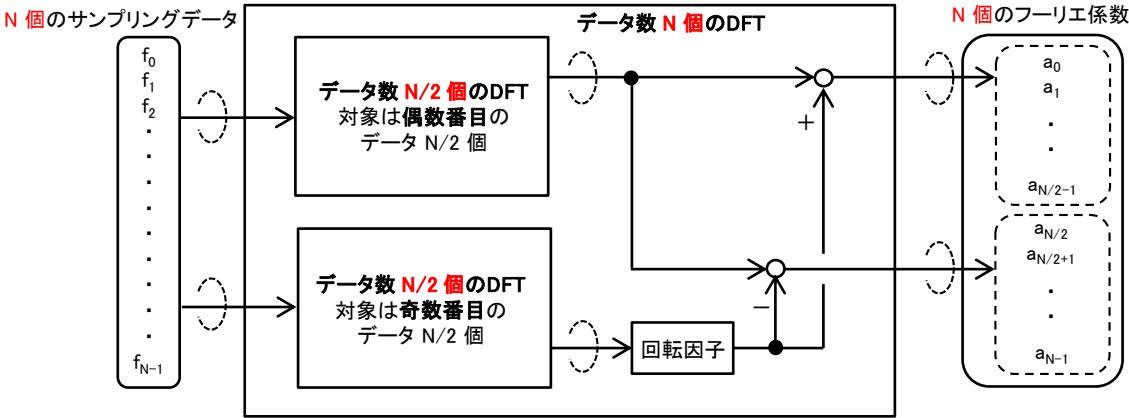
(式32)は、フーリエ係数 a_k の初めの半分は、偶数番目のデータ $N/2$ 個の DFT と、奇数番目のデータ $N/2$ 個の DFT と回転因子の積の和で求まることを示している。

また、(式33)は、 a_k の残りの半分は、偶数番目のデータ $N/2$ 個の DFT から、奇数番目のデータ $N/2$ 個の DFT と回転因子の積を引いて求まることを示している。

データ数 N 個の DFT がデータ数 N/2 個の 2つの DFT の組合せになっていることが分かる(図3)。

(付録8)に、 $N = 8$ の場合の FFT を示しておく。

また、FFT の演算速度に関して(付録9)に整理しておく。



(図3) FFT の構造

付録1. 複素指数関数(三角関数)は直交基底

集合の要素の間に加法(交換法則、結合法則など)と乗法(結合法則、分配法則など)が定義されているとき、この要素をベクトルという。この定義に照らせば、関数をベクトルとして扱い、ベクトルの内積と同じく関数の内積を定義することができる。ここでは、複素フーリエ級数で使用される複素指数関数 $e^{jn\omega_0 t}$ の内積を調べることで、**複素指数関数が直交基底である**ことを確認する。

・内積の定義

関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の内積を $\int_a^b f(x) g^*(x) dx$ (但し、 $g^*(x)$ は $g(x)$ の共役複素) ... (付式1) であると定義する。
なお、 $\int_a^b f(x) g^*(x) dx = 0$ のとき、関数 $f(x)$ と $g(x)$ は直交しているという。
(例1) 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$, $f(x) = x$, $g(x) = x + j$ のとき、 $g^*(x) = x - j$ であるので、関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積は、
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g^*(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x (x - j) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - j x) dx = [(1/3) x^3 - (1/2) j x^2]_{-\pi}^{\pi} = (\pi^3/3 - j \pi^2/2) - (-\pi^3/3 - j \pi^2/2) = (2/3) \pi^3$$
 直交していない。
(例2) 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ のとき、 $g^*(x) = x^2$ であるので、関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積は、
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g^*(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x x^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^3 dx = [(1/4) x^4]_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0$$
 よって、関数 $f(x)$ と $g(x)$ は直交している。

複素指数関数の関数セット $\{ 1, e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, \dots, e^{jn\omega_0 t}, \dots \}$ (n は整数) から、任意の関数を2つ取り出して内積を計算する。なお、 $\omega_0 = 2\pi/T$ である。

$\cdot m \neq n$ のとき、

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jm\omega_0 t} (e^{jn\omega_0 t})^* dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = [e^{j(m-n)\omega_0 t} / (j(m-n)\omega_0)]_{-T/2}^{T/2} = [e^{j(m-n)(2\pi/T)t} / \{j(m-n)(2\pi/T)\}]_{-T/2}^{T/2}$$
$$= (e^{j(m-n)\pi} - e^{-j(m-n)\pi}) / (2\pi j (m-n)/T) = \sin(m-n)\pi / \{(m-n)\pi/T\} = 0$$

$\cdot m = n$ のとき、

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jm\omega_0 t} (e^{jn\omega_0 t})^* dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^0 dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = [t]_{-T/2}^{T/2} = T/2 - (-T/2) = T$$

よって、関数セット $\{ 1, e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, \dots, e^{jn\omega_0 t}, \dots \}$ (n は整数) が互いに直交していることが分かる。

■三角関数の積の積分(内積) (注)積分区間 $-T/2 \leq t \leq T/2$ の記載を省略、三角関数の積和公式(参考)を活用している。
複素指数関数は三角関数で構成されている(オイラーの公式)。よって、複素指数関数が直交基底であることから三角関数も直交基底になる。
下記はそのことを確認したものである。

$\cdot \int 1 \times \sin n\omega_0 t dt = \int \sin 2n\pi t/T dt = [-(\cos 2n\pi t/T)/(2n\pi/T)] = -(\cos n\pi - \cos(-n\pi))/(2n\pi/T) = ((-1)^n - (-1)^n)/(2n\pi/T) = 0$

$\cdot \int 1 \times \cos n\omega_0 t dt = \int \cos 2n\pi t/T dt = [(\sin 2n\pi t/T)/(2n\pi/T)] = -(\sin n\pi - \sin(-n\pi))/(2n\pi/T) = (0 - 0)/(2n\pi/T) = 0$

$\cdot \int (\sin m\omega_0 t) (\cos n\omega_0 t) dt = 0 \dots \textcircled{1}$
何故なら、奇関数 \sin と偶関数 \cos の積は奇関数であり、奇関数の積分範囲が正負幅が同じときこの積分は0になる。

$\cdot \int (\cos m\omega_0 t) (\cos n\omega_0 t) dt = \int (\cos 2m\pi t/T) (\cos 2n\pi t/T) dt = \int 1/2 [\cos 2(m+n)\pi t/T + \cos 2(m-n)\pi t/T] dt \dots \textcircled{2}$
 $\cos 2(m+n)\pi t/T = 0$, また、 $m \neq n$ のときの $\cos 2(m-n)\pi t/T = 0$ 何故なら、 \cos 関数の1周期の積分は0になる。
よって、この式の値は、 $m = n$ のときの $1/2 \int \cos 2(m-n)\pi t/T$ の値になる。よって、 $1/2 \int 1 dt = 1/2 T$

$\cdot \int (\sin m\omega_0 t) (\sin n\omega_0 t) dt = \int (\sin 2m\pi t/T) (\sin 2n\pi t/T) dt = \int -1/2 [\cos 2(m+n)\pi t/T - \cos 2(m-n)\pi t/T] dt \dots \textcircled{3}$
上記と同様にして、この式の値は、 $m = n$ のときの $1/2 \int \cos 2(m-n)\pi t/T$ の値になる。よって、 $1/2 \int 1 dt = 1/2 T$

なお、 $\textcircled{1}$ と $m \neq n$ のときの $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ を実際に計算して確認しておく。

$\textcircled{1} = \int (\sin 2m\pi t/T) (\cos 2n\pi t/T) dt = \int 1/2 [\sin(2m\pi t/T + 2n\pi t/T) + \sin(2m\pi t/T - 2n\pi t/T)] dt$
$$= \int 1/2 [\sin 2(m+n)\pi t/T + \sin 2(m-n)\pi t/T] dt = 1/2 [-(\cos 2(m+n)\pi t/T)/(2(m+n)\pi/T) - (\cos 2(m-n)\pi t/T)/(2(m-n)\pi/T)]$$
$$= 1/2 [-(\cos(m+n)\pi - \cos(-(m+n)\pi))/(2(m+n)\pi/T) - (\cos(m-n)\pi - \cos(-(m-n)\pi))/(2(m-n)\pi/T)] = 1/2 (0 - 0) = 0$$

$\textcircled{2} = 1/2 [(\sin 2(m+n)\pi t/T)/(2(m+n)\pi/T) + (\sin 2(m-n)\pi t/T)/(2(m-n)\pi/T)] = 1/2 \{(\sin(m+n)\pi)/(2(m+n)\pi/T) + (\sin(m-n)\pi)/(2(m-n)\pi/T)\}$
$$+ (\sin(n-m)\pi)/(2(m-n)\pi/T) - 1/2 \{(\sin(-(m+n)\pi)/(2(m+n)\pi/T) + (\sin(-(m-n)\pi)/(2(m-n)\pi/T)) = 0 - 0 = 0$$

$\textcircled{3} = -1/2 [(\sin 2(m+n)\pi t/T)/(2(m+n)\pi/T) - (\sin 2(m-n)\pi t/T)/(2(m-n)\pi/T)] = -1/2 \{(\sin(m+n)\pi)/(2(m+n)\pi/T) - (\sin(m-n)\pi)/(2(m-n)\pi/T)\}$
$$- (\sin(n-m)\pi)/(2(m-n)\pi/T) - 1/2 \{(\sin(-(m+n)\pi)/(2(m+n)\pi/T) - (\sin(-(m-n)\pi)/(2(m-n)\pi/T)) = -0 - (-0) = 0$$

■複素指数関数と三角関数との関係

オイラーの公式 : $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$
ここで、 $e = 2.728282 \dots$ ネイピア数(自然対数の底)
なお、複素指数関数 $e^{j\theta}$ は、 $\cos \theta + j \sin \theta$ という複素数を表し、 e の $j\theta$ 乗と言う意味はない。

オイラーの公式から、
$$\cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) / 2$$
$$\sin \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) / (2j)$$

よって、
$$\cos n\omega_0 t = (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) / 2$$
$$\sin n\omega_0 t = (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) / (2j)$$

■三角関数の積和公式(参考)

$$\sin \alpha \cos \beta = 1/2 \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$
$$\cos \alpha \cos \beta = 1/2 \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$
$$\sin \alpha \sin \beta = -1/2 \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

付録2. フーリエ級数の計算例

(付図1)に示す矩形波の周期関数を(複素)フーリエ級数に分解する。

$0 \leq t \leq T/2$ のとき、 $f(t) = 1$ $-T/2 \leq t \leq 0$ のとき、 $f(t) = -1$
周期は T 、基本角周波数は $\omega_0 = 2\pi/T$

ただし、 $f(t)$ は区分的に滑らかな関数、つまり、区間内で有限個の点を除いて連続、かつ、不連続点 a で $f(a-0)$ と $f(a+0)$ が存在する関数であるとする。(図1)の矩形波は、区間 $-T/2 \sim T/2$ の間に $t=0$ で不連続な点があり、 $f(0-0) = -1$ 、 $f(0+0) = 1$ が存在する。よって、この関数は区分的に滑らかな関数である。

まず、複素フーリエ級数の係数 c_n を求める。

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T/2}^0 (-1) e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_0^{T/2} (+1) e^{-jn\omega_0 t} dt \right\} = \left\{ \frac{\omega_0}{2\pi} \right\} \left\{ \left[-\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right]_{-T/2}^0 + \left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right]_0^{T/2} \right\}$$
$$= \left\{ (1 - e^{jn\pi}) - (e^{-jn\pi} - 1) \right\} / (jn\pi) = -(e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} - 2) / (jn\pi) = -1 \{ 2 \cos(n\pi) - 2 \} / (jn\pi) = \{-\cos(n\pi) + 1\} / (jn\pi)$$

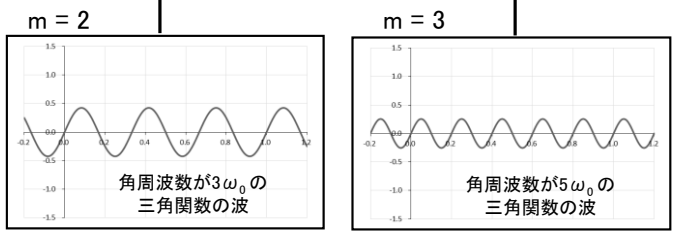
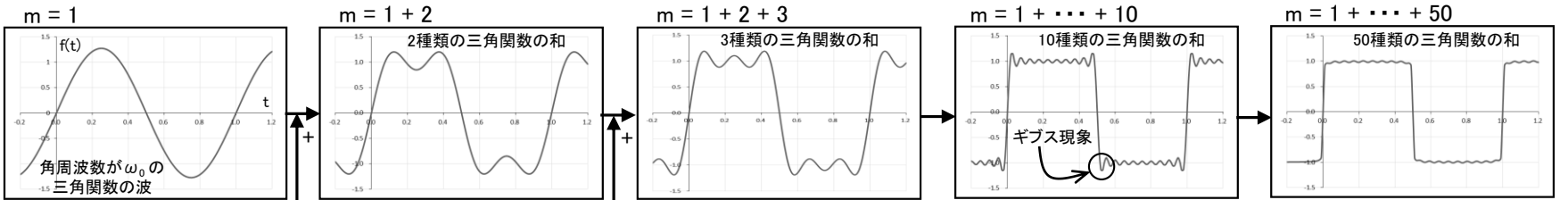
よって、 $n = \text{奇数}$ のとき $c_n = 2 / (jn\pi)$ 、 $n = \text{偶数}$ のとき $c_n = 0$

以上から、周期関数 $f(t)$ は複素フーリエ級数に分解することができる、 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 e^{jn\omega_0 t} / (jn\pi)$ 但し、 n は奇数

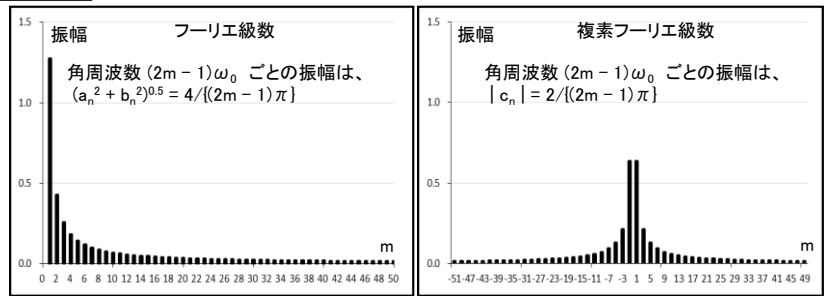
ここで、 $f(t)$ を三角関数の和の形にする。 $n = -\infty \sim \infty$ を $n = 0 \sim \infty$ に置き換えてオイラーの公式を使い、また、 n は奇数であるので $n = 2m - 1$ とおくと、

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 e^{jn\omega_0 t} / (jn\pi) - \sum_{n=0}^{\infty} 2 e^{-jn\omega_0 t} / (jn\pi) = \{ 4 / \pi \} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\omega_0 t) / n = \{ 4 / \pi \} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\{(2m-1)\omega_0 t\} / (2m-1) \quad \text{ただし、} m=1, 2, \dots$$

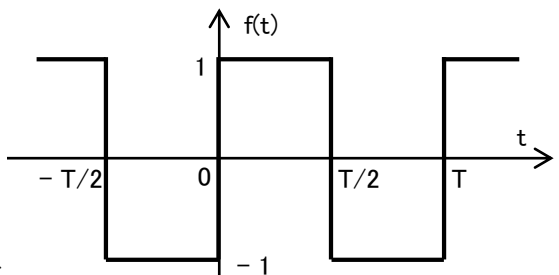
(計算例) (付図1)の矩形波をフーリエ級数に分解した結果を(付図2)に示す。ここでは、周期 $T = 1$ とする。よって、基本角周波数は $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi$ である。角周波数と振幅が異なる三角関数の重ね合わせによって、(付図1)の周期関数である矩形波に近づいていく様子が分かる。また、角周波数ごとの三角関数の振幅を(付図3)に示す。このグラフが離散スペクトルであり、角周波数ごとの波の振幅を俯瞰することができる。なお、(付図1)のような不連続点がある関数のフーリエ級数展開を低次で打ち切った場合には、(付図2)の $m = 1 + \dots + 10$ のケースで見られるが、不連続点で波打ち現象が起こる。この現象を**ギブス現象**という。この現象の解消方法としては、チェザロの総和法(平均化する方法)が知られている。



(付図2) 矩形波のフーリエ級数展開



(付図3) 矩形波の離散スペクトル



(付図1) 矩形波(周期関数)

付録3. フーリエ級数と複素フーリエ級数の比較

(付表1)にフーリエ級数と複素フーリエ級数の比較を示す。
フーリエ級数と複素フーリエ級数では、使用する直交基底が異なる。フーリエ級数では直交基底として三角関数を使用するが、複素フーリエ級数では複素指数関数を使用する。それによって、複素フーリエ級数の級数展開の式は簡素化されている。フーリエ級数と複素フーリエ級数では、表現方法が異なるだけである。

(付表1)フーリエ級数のまとめ

	フーリエ級数	複素フーリエ級数																				
対象関数	f(t) は周期 T (sec) の 周期関数 、基本角周波数は $\omega_0 = 2 \pi / T$ (rad / sec)、ここでは、f(t) は時間関数、f(x) (x は位置)とした場合は空間関数																					
級数展開 (近似式)	$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos (n\omega_0 t) + b_n \sin (n\omega_0 t) \} \cdots$ (付式2)	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \cdots$ (付式4)																				
級数展開の係数 (フーリエ係数)	$a_0 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos (n\omega_0 t) dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$ $b_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin (n\omega_0 t) dt \quad (n = 1, 2, \cdots) \quad \cdots$ (付式3)	$c_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \cdots$ (付式5)																				
フーリエ係数同志の関係	$n \geq 1$ で、 $a_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos (n\omega_0 t) dt = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \{ (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) / 2 \} dt = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt + 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = c_{-n} + c_n$ $b_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin (n\omega_0 t) dt = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \{ (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) / 2j \} dt = -j / T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt + j / T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = -j c_{-n} + j c_n = -j (c_{-n} - c_n)$ $n = 0$ で、 $c_0 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^0 dt = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = a_0$																					
直交基底を構成する関数系	$\{ 1, \cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \}$ この関数セットは直交基底である(付録1)。 <table><tr><td>関数</td><td>1</td><td>$\cos(n\omega_0 t)$</td><td>$\sin(n\omega_0 t)$</td></tr><tr><td>1</td><td>T</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>$\cos(m\omega_0 t)$</td><td>0</td><td>$T/2 (m = n) \quad 0 (m \neq n)$</td><td>0</td></tr><tr><td>$\sin(m\omega_0 t)$</td><td>0</td><td>0</td><td>$T/2 (m = n) \quad 0 (m \neq n)$</td></tr></table>	関数	1	$\cos(n\omega_0 t)$	$\sin(n\omega_0 t)$	1	T	0	0	$\cos(m\omega_0 t)$	0	$T/2 (m = n) \quad 0 (m \neq n)$	0	$\sin(m\omega_0 t)$	0	0	$T/2 (m = n) \quad 0 (m \neq n)$	$\{ e^{jn\omega_0 t} \}$ この関数セットは直交基底である(付録1)。 <table><tr><td>関数</td><td>$e^{jn\omega_0 t}$</td></tr><tr><td>$e^{jm\omega_0 t}$</td><td>$T (m = n) \quad 0 (m \neq n)$</td></tr></table>	関数	$e^{jn\omega_0 t}$	$e^{jm\omega_0 t}$	$T (m = n) \quad 0 (m \neq n)$
関数	1	$\cos(n\omega_0 t)$	$\sin(n\omega_0 t)$																			
1	T	0	0																			
$\cos(m\omega_0 t)$	0	$T/2 (m = n) \quad 0 (m \neq n)$	0																			
$\sin(m\omega_0 t)$	0	0	$T/2 (m = n) \quad 0 (m \neq n)$																			
関数	$e^{jn\omega_0 t}$																					
$e^{jm\omega_0 t}$	$T (m = n) \quad 0 (m \neq n)$																					
フーリエ級数展開の説明	関数 f(t) を角周波数 $n\omega_0$ の波の和で近似する。言い換えれば関数 f(t) に角周波数 $n\omega_0$ の波がどれくらい含まれているかを $n\omega_0$ に対応するフーリエ係数の大きさで示す。 $n\omega_0$ の波の振幅は、 $(a_n^2 + b_n^2)^{0.5}$ である。 (注) $a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$ $= (a_n^2 + b_n^2)^{0.5} \{ a_n (a_n^2 + b_n^2)^{-0.5} \cos(n\omega_0 t) + b_n (a_n^2 + b_n^2)^{-0.5} \sin(n\omega_0 t) \}$ $= (a_n^2 + b_n^2)^{0.5} \{ \cos \alpha \cos(n\omega_0 t) + \sin \alpha \sin(n\omega_0 t) \}$ $= (a_n^2 + b_n^2)^{0.5} \cos(n\omega_0 t + \alpha)$ と表すことができるので、振幅は $(a_n^2 + b_n^2)^{0.5}$	複素指数関数を使ってフーリエ級数の表現方法を簡素化している。フーリエ級数と同様で関数 f(t) に角周波数 $n\omega_0$ の波がどれくらい含まれているかを $n\omega_0$ に対応するフーリエ係数の大きさで示す。この角周波数の波の振幅は $ c_n $ であり、f(t) を構成する三角関数の周波数分布が可視化される。 オイラーの公式: 複素指数関数 $e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)$																				

付録4. フーリエ変換の計算例

(計算例) (付図4)の波形の近似式(逆フーリエ変換の式である(式16))の係数 $F(\omega)$ を、フーリエ変換の式である(式15)を使って求める。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-d/2}^{d/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[e^{-j\omega t} \right]_{-d/2}^{d/2} = \left[\cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t) \right]_{-d/2}^{d/2} / (-j\omega)$$

$$= \{ \cos(-\omega d/2) + j \sin(-\omega d/2) - \cos(\omega d/2) - j \sin(\omega d/2) \} / (-j\omega) = 2 \{ \sin(\omega d/2) \} / \omega$$

なお、一般に、 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) / x = 1$ であるので、 $\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) = d \{ \sin(\omega d/2) \} / (\omega d/2) = d$

よって、 $\omega \neq 0$ のとき、 $F(\omega) = 2 \{ \sin(\omega d/2) \} / \omega$ $\omega = 0$ のとき、 $F(\omega) = d$

$d = 1$ のときの連続スペクトル $|F(\omega)|$ を(付図5)に示す。

なお、ここで求めた $F(\omega)$ を使用して、逆フーリエ変換で、 $f(t)$ が再現されることを確認しておく($d = 1$ とする)。ここでは、三角関数の積和の公式を使い、積分範囲 $-\infty \sim \infty$ での奇関数の積分が 0 になること、更には、 $\int (\sin ax) / x dx = \pi \operatorname{sgn}(a)$ (sgn は正負の符号)であることを使う。

なお、積分範囲 $-\infty \sim \infty$ の記載は省略する。

$$f(t) = 1/(2\pi) \int F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1/\pi \int (\sin \omega/2)/\omega e^{j\omega t} d\omega = 1/\pi \int (\sin \omega/2)/\omega (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega$$

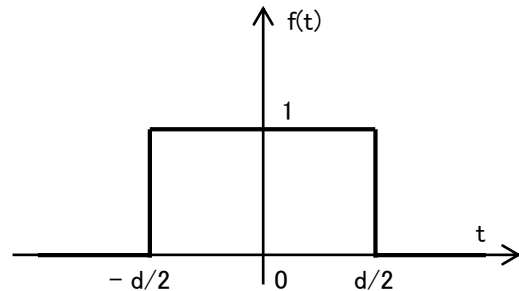
$$= 1/\pi \int (\sin \omega/2 \cos \omega t + j \sin \omega/2 \sin \omega t) / \omega d\omega = 1/(2\pi) \int \{ \sin(\omega/2 + \omega t) + \sin(\omega/2 - \omega t) - j \cos(\omega/2 + \omega t) + j \cos(\omega/2 - \omega t) \} / \omega d\omega$$

$$= 1/(2\pi) \int \{ \sin(\omega/2 + \omega t) + \sin(\omega/2 - \omega t) \} / \omega d\omega = 1/(2\pi) \int \{ \sin(1/2 + t)\omega + \sin(1/2 - t)\omega \} / \omega d\omega$$

$$= 1/(2\pi) \{ \pi \operatorname{sign}(1/2 + t) + \pi \operatorname{sign}(1/2 - t) \}$$

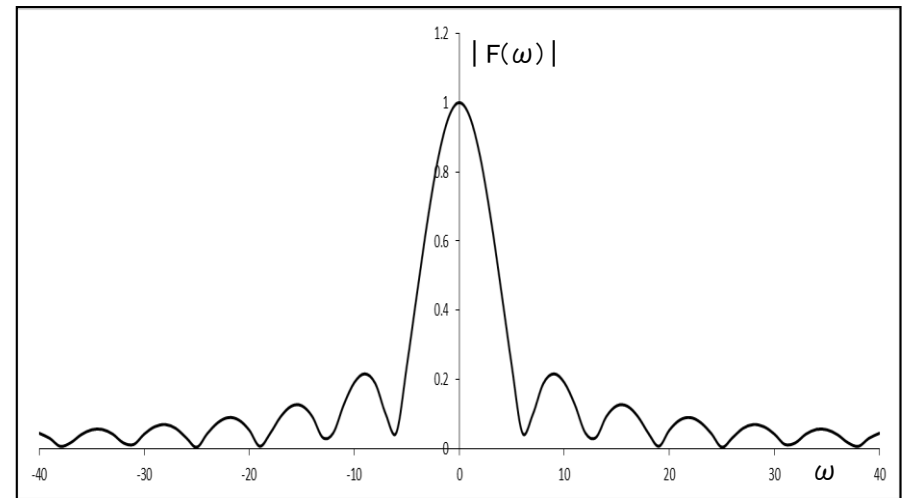
$$= -1/2 \leq t \leq 1/2 \text{ のとき、} f(t) = (\pi + \pi)/(2\pi) = 1$$

$$\text{それ以外のとき、} f(t) = (\pi - \pi)/(2\pi) = 0$$



$-d/2 \leq t \leq d/2$ のとき、 $f(t) = 1$
それ以外のとき、 $f(t) = 0$

(付図4)矩形波



(付図5)連続スペクトル

付録5. 離散フーリエ変換の計算例

T : 時間区間

t : 時間 ($0 \leq t \leq T$) $T = 1$ として $0 \leq t \leq 1$

N : 時間区間内のサンプリング回数

D : サンプリング間隔 $N = 8$ として $D = T/N = 0.125$

サンプリングデータ $f(t)$ は(付表2) $f_k = f(kD)$ と表記する。

例えば、 $f_2 = f(2D) = f(2 \times 0.125) = f(0.25) = 2.2$

$w = e^{j 2 \pi / N} = e^{j 2 \pi / 8}$ おく。例えば、 $w^{-7} = \cos (14 \pi / 8) - j \sin (14 \pi / 8) = 1 / \sqrt{2} + j / \sqrt{2}$

(付表2) サンプリングデータ

k	0	1	2	3	4	5	6	7
t = kD	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875
f(t)	1.1	1.4	2.2	2.8	2.3	2.5	3.0	2.6

離散フーリエ変換は(式20)を使って計算する。なお、下式では、 $r = 1 / \sqrt{2}$ と置き換えている。

a_0

a_1

a_2

a_3

a_4

a_5

a_6

a_7

$= 1/8$

1

1

1

1

1

1

1

1

w^{-1}

w^{-2}

w^{-3}

w^{-4}

w^{-5}

w^{-6}

w^{-7}

w^{-2}

w^{-4}

w^{-6}

w^{-8}

w^{-10}

w^{-12}

w^{-14}

w^{-3}

w^{-6}

w^{-9}

w^{-12}

w^{-15}

w^{-18}

w^{-21}

w^{-4}

w^{-8}

w^{-12}

w^{-16}

w^{-20}

w^{-24}

w^{-28}

w^{-5}

w^{-10}

w^{-15}

w^{-20}

w^{-25}

w^{-30}

w^{-35}

w^{-6}

w^{-12}

w^{-18}

w^{-24}

w^{-30}

w^{-36}

w^{-42}

w^{-7}

w^{-14}

w^{-21}

w^{-28}

w^{-35}

w^{-42}

w^{-49}

f_0

f_1

f_2

f_3

f_4

f_5

f_6

f_7

$= 1/8$

1

1

1

1

1

1

1

1

$(r - j r)$

$-j$

$(-r - j r)$

-1

$(-r + j r)$

j

$(r + j r)$

1

$-j$

-1

j

1

$-j$

-1

j

1

$(-r - j r)$

j

$(r - j r)$

-1

$(r + j r)$

$-j$

$(-r + j r)$

1

-1

1

-1

1

-1

1

-1

1

$(-r + j r)$

$-j$

$(r + j r)$

-1

$(r - j r)$

j

$(-r - j r)$

1

j

-1

$-j$

1

j

-1

$-j$

1

$(r + j r)$

j

$(-r + j r)$

-1

$(-r - j r)$

$-j$

$(r - j r)$

1.1

1.4

2.2

2.8

2.3

2.5

3.0

2.6

$= 1/8$

8.8

$(-1.2 - 1.3 r) + j (0.8 + 0.9 r)$

$-1.8 + j 1.5$

$(-1.2 + 1.3 r) + j (-0.8 + 0.9 r)$

$-0.7 - j 0.7$

$(-1.2 + 1.3 r) + j (0.8 - 0.9 r)$

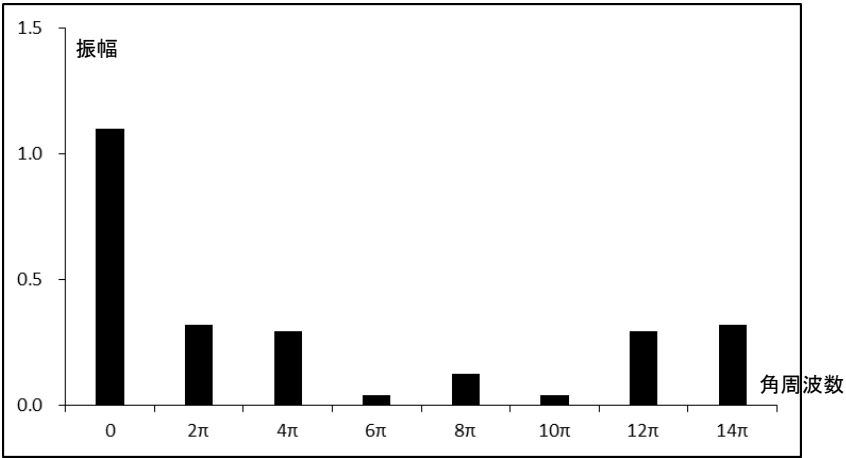
$-1.8 - j 1.5$

$(-1.2 - 1.3 r) + j (-0.8 - 0.9 r)$

よって、8 個のサンプリングデータ f_0, f_1, \dots, f_7 から、離散フーリエ変換によって複素指数関数の係数(角周波数ごとの振幅)が求まる。
(付図6)に振幅を図示する(例、 a_0 は角周波数 $\omega = 0$ の振幅、...)。

$|a_0| : |a_1| : |a_2| : |a_3| : |a_4| : |a_5| : |a_6| : |a_7| = 1.1 : 0.32 : 0.29 : 0.04 : 0.12 : 0.04 : 0.29 : 0.32$

(計算例) $|a_1| = (1/8) \sqrt{(-1.2 - 1.3/\sqrt{2})^2 + (0.8 + 0.9/\sqrt{2})^2} = 0.32$



(付図6) 角周波数ごとの振幅

付録6. 離散コサイン変換の計算例

ここでは、離散コサイン変換を使用したデータ圧縮の計算例を示す。

T：時間区間

t：時間（ $0 \leq t \leq T$ ） $T=1$ として $0 \leq t \leq 1$

N：時間区間内のサンプリング回数 $N=8$

サンプリング時刻は $1/16, 3/16, \dots, 15/16$ サンプリングデータは、 f_0, f_1, \dots, f_7 ここでは、 $f(t) = -t^2 + 1$ とした。

(付図7)の①がサンプリングデータである。このサンプリングデータを使用して、離散コサイン変換の(式27)から(式23)の係数 c_k が求まる(付図7の②)。

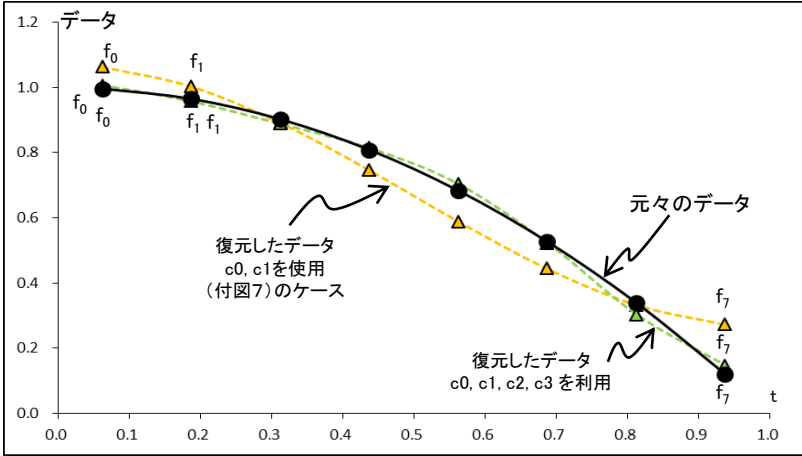
ここで、 c_0, c_1 の値に比べて小さな値の $c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ の値を0に置き換える(付図7の③)。これがデータ圧縮である。

その上で、逆離散コサイン変換の(式25)を使用して、 f_0, f_1, \dots, f_7 の値を復元する(付図7の④)。

元々の f_0, f_1, \dots, f_7 の値(付図7の①)と復元した f_0, f_1, \dots, f_7 の値(付図7の④)の比較を(付図8)に示す。データを圧縮しても元々のデータに近い値が復元されていることがわかる。ちなみに、(付図8)には c_4, c_5, c_6, c_7 を0に置き換えたケースも載せておいた。このケースでは復元した値は元々の値に極めて近いことが分かる。

	①		②	③		④			
f_0	0.9961	離散 コサイン 変換	c_0	0.6680	逆離散 コサイン 変換	f_0	1.0629		
f_1	0.9648		c_1	0.4026		c_1	0.4026	f_1	1.0028
f_2	0.9023		c_2	-0.0986		0	f_2	0.8917	
f_3	0.8086		c_3	0.0421		0	f_3	0.7465	
f_4	0.6836		c_4	-0.0221		0	f_4	0.5894	
f_5	0.5273		c_5	0.0126		0	f_5	0.4443	
f_6	0.3398		c_6	-0.0070		0	f_6	0.3332	
f_7	0.1211		c_7	0.0032		0	f_7	0.2731	

(付図7)データの圧縮方法



(付図8)データ復元の様子

■ 離散フーリエ変換と離散コサイン変換 両者を整理して(付表3)にまとめておく。

N：サンプリング回数

f_n ：サンプリングデータ

a_n, c_n ：フーリエ係数

$w = e^{-j2\pi/N}$ (複素指数関数)

$n = 0, 1, \dots, N-1$

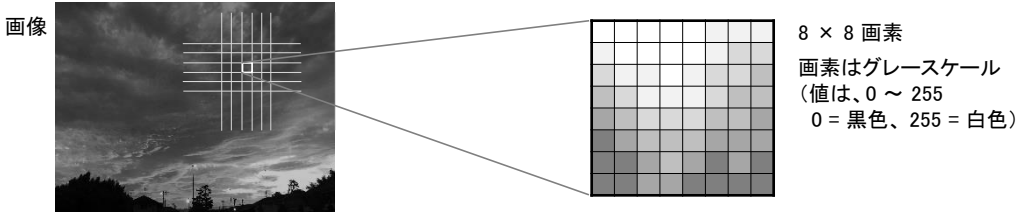
(付表3) 離散フーリエ変換と離散コサイン変換

離散フーリエ変換 (DFT)	$a_n = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{kn}$	逆離散フーリエ変換	$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k w^{-kn}$
離散コサイン変換 (DCT)	$\begin{aligned} &n=0 \text{ のとき、} \\ &c_0 = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} f_k \\ &n=1, \dots, N-1 \text{ のとき、} \\ &c_n = (2/N) \sum_{k=0}^{N-1} \cos \{ n(2k+1)\pi / 2N \} f_k \end{aligned}$	逆離散コサイン変換	$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cos \{ k(2n+1)\pi / (2N) \}$

付録7. フーリエ変換による画像圧縮(JPEG) (1/2)

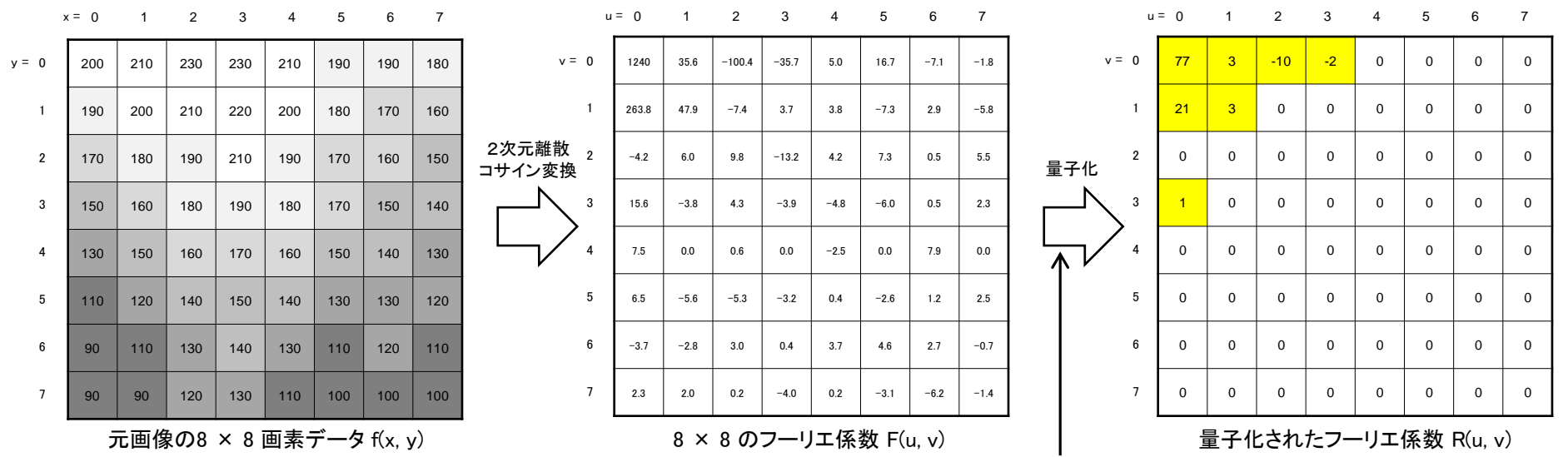
ここでは、2次元離散コサイン変換を使用した、グレースケールの画像の圧縮と復元の計算例を示す。

(手順1) グレースケールの画像を対象に、8 × 8 画素を1ブロックとするブロック分割を行う(付図9)。なお、(手順2)以降の画像圧縮と画像復元は分割したブロックごとに行う。



(付図9)ブロック分割

(手順2) 8 × 8 画素のデータ $f(x, y)$ を圧縮する。



- ① 画素データ $f(x, y)$ から、(式29)の2次元離散コサイン変換を使ってフーリエ係数 $F(u, v)$ を求める。
- ② 求めたフーリエ係数は、 u, v の値が小さい、つまり低周波数のときの $F(u, v)$ は大きな値をとり (なお、 $u = 0, v = 0$ のときは直流成分になる)、 u, v の値が大きい、つまり高周波数のときの $F(u, v)$ は小さな値をとること、つまり、**低周波領域に多くの画像情報が集中し、一方高周波領域の情報量は少ないことが分かる。また、人の目は低周波成分に敏感である一方、高周波成分に鈍感であるという特性がある。**
- ③ そこで、高周波成分を無視して情報量を削減するというデータ圧縮のアイデアが生まれた。それを実現する方法が、量子化といわれる方法である。 $R(u, v) = F(u, v) / Q(u, v)$ の式を使って整数化する(小数点以下は切り捨て)。量子化テーブルは、フーリエ係数の行列に合わせて画質を保ったまま圧縮率を上げるため、左上側の定数を小さな値に、右下側の定数を大きな値にしてある。量子化の結果、高周波成分の一部だけが残りに、他は 0 になっている。これがデータ圧縮である。

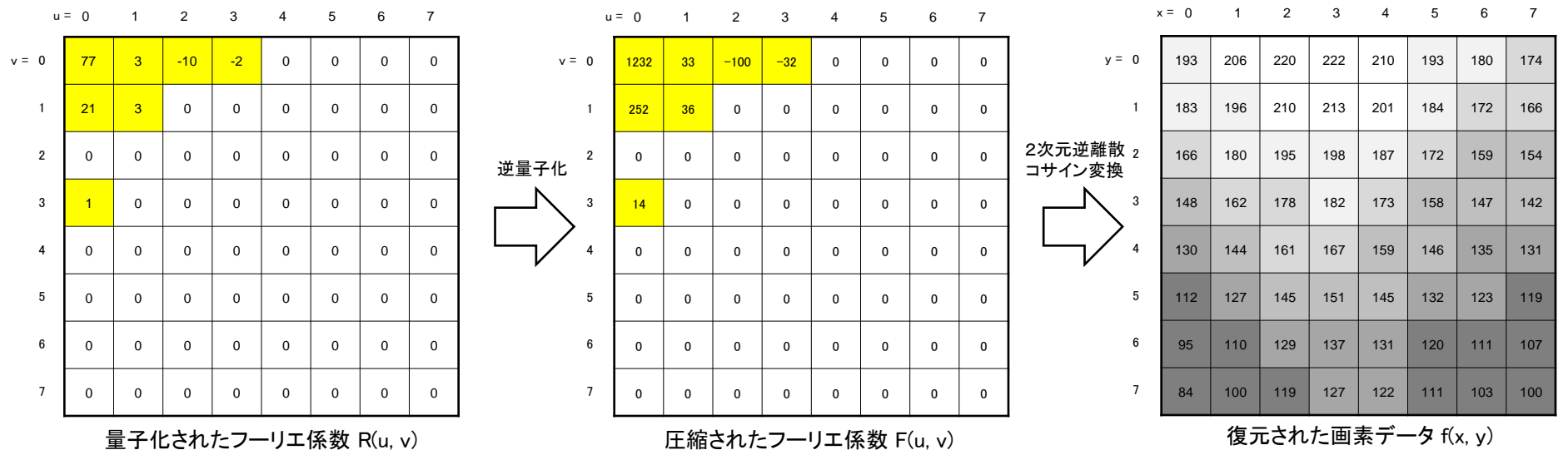
16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	78	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

量子化テーブル $Q(u, v)$
左のテーブルの値は、
JPEG委員会の推奨値

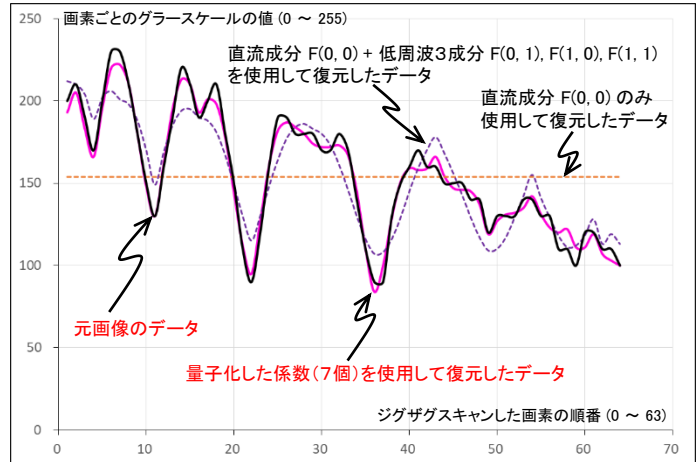
付録7. フーリエ変換による画像圧縮 (JPEG) (2/2)

(手順3) 8×8 画素のデータ $f(x, y)$ を復元する。

- ①量子化されたフーリエ係数 $R(u, v)$ を量子化テーブルを使用してフーリエ係数 $F(u, v)$ に戻す。ただし、戻されたフーリエ係数は量子化されたフーリエ係数を使用しているため、特に高周波領域をはじめ多くの係数の値は 0 に置き換えられたままである。よって、圧縮されたフーリエ係数になっている。
- ③次いで、圧縮されたフーリエ係数 $F(u, v)$ を(式30)の2次元逆離散コサイン変換を使って、画素データ $f(x, y)$ を復元する。



(付図10)に元画像と復元された画像の画素データを載せる。多くのフーリエ係数が 0 に置き換えられるという大胆とも言えるデータ圧縮が行われているが、よく復元できていることが分かる。加えて、(図10)には、直流成分だけ使って復元したケースと直流成分+低周波成分を使って復元したケースの画素データも載せておく。

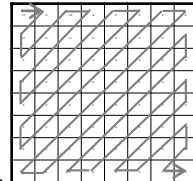


(付図10) 元画像と復元データの比較

■参考

量子化されたフーリエ係数を符号化してさらにデータ圧縮をすることができる。

- ①低周波領域(左上)から高周波領域(右下)をジグザグスキャン(右図)して、データの並びを一次元系列化する。(結果) 77 3 21 0 3 -10 -2 0 0 1 0 0 ... 0
- ②次いで、可逆圧縮法(符号化しても元のデータに戻せる方法)であるランレングス符号化、ハフマン符号化でデータ圧縮を行う。
 - ・ランレングス符号化
直流成分(ここでは、77)は隣り合うブロックの直流成分との差分表示(略)。0 以外の数字が出現した時点で、直前まで 0 が続いた数をその値とともに符号化する。0 以外の値がそれ以降出現しなければ、EOB (End Of Block) として符号化を完了する。(結果、直流成分以外) (0, 3) (0, 21) (1, 3) (0, -10) (0, -2) (2, 1) EOB
 - ・ハフマン符号化(略)
出現頻度の高いデータの符号長を短くする方法で、さらに圧縮率を上げる。



付録8. 高速フーリエ変換(バタフライ演算)

(例) サンプルングデータ数 $N = 8 (= 2^3)$ のときの FFT (ここでは、フーリエ変換前のデータを並び替える時間真間引き法型を使用)

1) $N = 8$ の DFT は、偶数番目のデータを対象とした $N = 4$ の DFT と奇数番目のデータを対象とした $N = 4$ の DFT の 2 つの DFT で構成される。

$k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ つまり、 $k = 0, 1, 2, 3$ で、

(式32)から、周波数スペクトル a_0, a_1, a_2, a_3 は、
$$a_k = \underbrace{\sum_{r=0}^3 f_e w_4^{rk}}_{\text{偶数番目のデータを対象とした DFT}} + w_8^k \underbrace{\sum_{r=0}^3 f_o w_4^{rk}}_{\text{奇数番目のデータを対象とした DFT}} \dots \text{(付式6)}$$

(式33)から、周波数スペクトル a_4, a_5, a_6, a_7 は、
$$a_{k+4} = \underbrace{\sum_{r=0}^3 f_e w_4^{rk}}_{\text{偶数番目のデータを対象とした DFT}} - w_8^k \underbrace{\sum_{r=0}^3 f_o w_4^{rk}}_{\text{奇数番目のデータを対象とした DFT}} \dots \text{(付式7)}$$

(付式6)と(付式7)の演算の様子を(付図9)に示す。ここで、偶数番目のデータ(f_e)は f_0, f_2, f_4, f_6 、奇数番目のデータ(f_o)は f_1, f_3, f_5, f_7 になる。
2) $N = 4$ の 2 つの DFT は、1 つは1)の偶数番目のデータ f_0, f_2, f_4, f_6 のなかの、偶数番目のデータ f_0, f_4 を対象とした $N = 2$ の DFT と奇数番目のデータ f_2, f_6 を対象とした $N = 2$ の DFT で構成され、もう 1 つの $N = 4$ の DFT は、1)の奇数番目のデータ f_1, f_3, f_5, f_7 のなかの、偶数番目のデータ f_1, f_5 を対象とした $N = 2$ の DFT と奇数番目のデータ f_3, f_7 を対象とした $N = 2$ の DFT で構成される。よって、DFT 4 に関して、(式32)と(式33)から次式を得る。

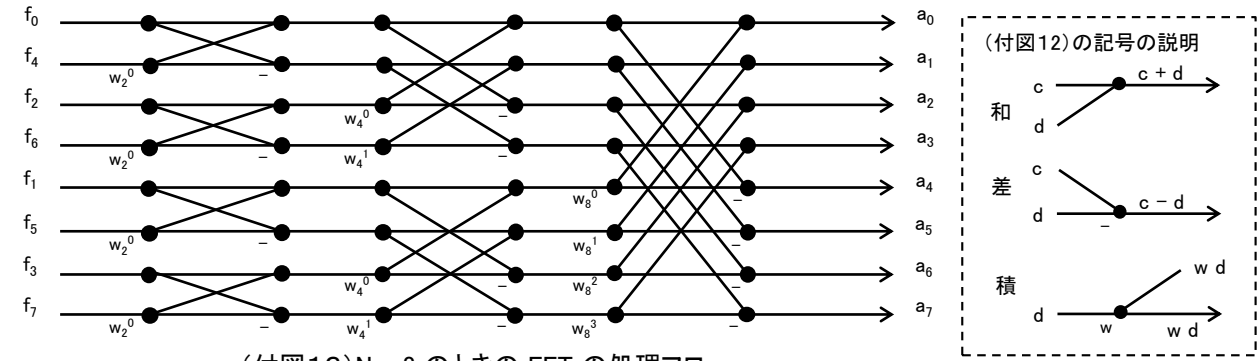
周波数スペクトル a_0, a_1 は、 $a_k = \sum_{r=0}^1 f_e w_2^{rk} + w_4^k \sum_{r=0}^1 f_o w_2^{rk}$ 周波数スペクトル a_2, a_3 は、 $a_{k+2} = \sum_{r=0}^1 f_e w_2^{rk} - w_4^k \sum_{r=0}^1 f_o w_2^{rk}$

この演算の様子を(付図10)に示す。

3) $N = 2$ の 4 つの DFT に関しては、(式32)と(式33)から次式を得る。この演算の様子を(付図11)に示す。

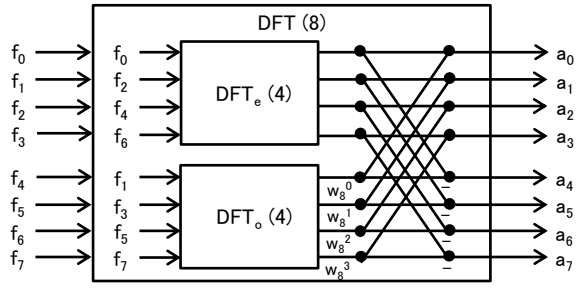
$k = 0$ の周波数スペクトル $a_0 = f_0 w_1^0 + w_2^0 f_4 w_1^0 = f_0 + f_4$, $a_1 = f_0 w_1^0 - w_2^0 f_4 w_1^0 = f_0 - f_4$

4) (付図10)に(付図11)を埋め込み、それを(付図9)に埋め込むと、
 $N = 8$ のときの FFT の構造が決まる(付図12)。

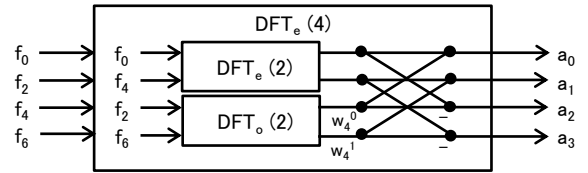


(付図12) $N = 8$ のときの FFT の処理フロー

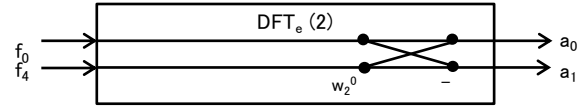
FFT の処理フロー(付図12)は、蝶が羽を広げているような線図の形をしているところから、**バタフライ演算**とされている。



(注) DFT_e : 偶数番目のデータの DFT DFT_o : 奇数番目のデータの DFT
(付図9) $N = 8$ のときの DFT



(付図10) $N = 4$ のときの DFT



(付図11) $N = 2$ のときの DFT

付録9. 高速フーリエ変換(補足)

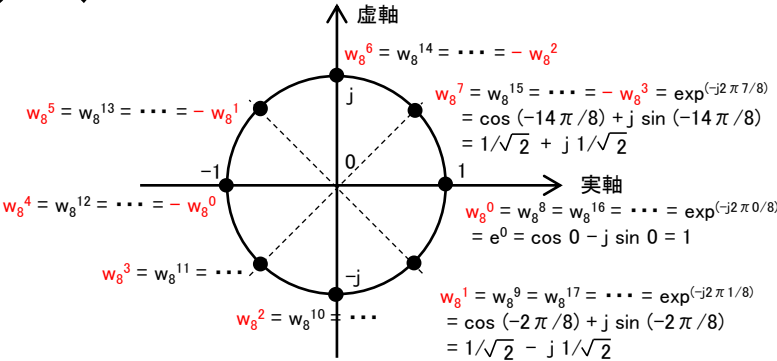
(1) 回転因子

複素指数関数 $e^{-j2\pi k/N} = \cos(-2\pi k/N) + j \sin(-2\pi k/N)$ (但し、 $k = 1, 2, \dots$) は複素平面の単位円上を回転する。

$w_N^k = e^{-j2\pi k/N}$ とおけば、以下が成立する(付図13)。

$\sum_{k=0}^{N-1} w_N^k = 0$, 例えば、 $N = 8$ のとき、 $w_8^0 + w_8^1 + \dots + w_8^7 = 0$

$w_N^k = w_N^{(k+N)}$, 例えば、 $N = 8$ のとき、 $w_8^0 = w_8^8, w_8^1 = w_8^9, w_8^2 = w_8^{10}, \dots$



(付図13) 回転因子 ($N = 8$ のとき)

(2) ビットリバーズ

N 個のデータの DFT は $N/2$ 個のデータの DFT で構成されており、次いで $N/2$ 個のデータの DFT は $N/4$ 個の DFT で構成されており、 \dots 、4 個のデータの DFT は 2 個の DFT で構成されている。このような構造を使って計算する仕組みが FFT である。

このとき、DFT に入力するデータを、その都度偶数番目のデータと奇数番目のデータに分ける必要がある。

例えば、データ数が N 個のとき、入力データ $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, \dots$ の偶数番目のデータは、 $f_0, f_2, f_4, f_6, \dots$ である。一方、奇数番目のデータは、 $f_1, f_3, f_5, f_7, \dots$ である。

次いで、データ数が $N/2$ 個のとき、入力データ $f_0, f_2, f_4, f_6, \dots$ を偶数番目のデータと奇数番目のデータに分ける。偶数番目のデータは、 f_0, f_4, \dots となり、奇数番目のデータは、 f_2, f_6, \dots となる。もう一つの入力データ $f_1, f_3, f_5, f_7, \dots$ に関しても同様である。

この分け方は、最初のデータの順番を2進数で表し、最初は1桁目が0であれば偶数、1であれば奇数とし、次いで1桁目が0のもの(偶数)のなかから2桁目が0であれば偶数、1であれば奇数とする方法になっている。この方法は、順番を2進数で表し、ビットの並びを反転することで実現できる(付表4)。この方法をビットリバーズという。

(付表4) ビットリバーズ(並び替え)

元の順序		2進数でのビットの並びを反転	
10進数	2進数	2進数	10進数
0	0 0 0	0 0 0	0
1	0 0 1	1 0 0	4
2	0 1 0	0 1 0	2
3	0 1 1	1 1 0	6
4	1 0 0	0 0 1	1
5	1 0 1	1 0 1	5
6	1 1 0	0 1 1	3
7	1 1 1	1 1 1	7

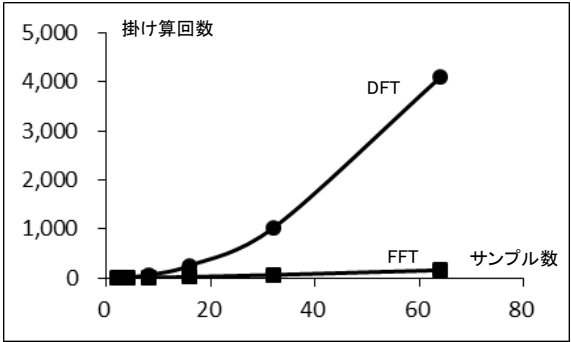
(3) 離散フーリエ変換(DFT)と高速フーリエ変換(FFT)の計算処理速度の比較

サンプリングデータ数 N での DFT の掛け算の回数は(式20)より、 N^2 である。

一方、FFT の掛け算の回数は、(式30)と(式31)から $N/2$ 回の掛け算項が両式で共通に使い、それを $(\log_2 N - 1)$ 回繰り返すことになるので、 $(N/2)(\log_2 N - 1)$ 回になる。

DFT と FFT の場合の掛け算回数を $N = 2 (= 2^1), 4 (= 2^2), 8 (= 2^3), 16 (= 2^4), 32 (= 2^5), 64 (= 2^6)$ の場合で比較したのが(付図14)のグラフである。

FFT ほうが掛け算回数が圧倒的に少ない。ちなみに、 $N = 1,024 (= 2^{10})$ のときの掛け算回数は、DFT で 1,048,576 回、FFT で 4,608 回である。サンプルデータ数の増大とともに、差は急拡大する。FFT の効果がよく分かる。



(付図14) 掛け算の回数

参考にした書籍とURL

Newton 別冊：「数字の世界 現代編、ベイズ統計、フーリエ解析、ブロックチェーン、本当に役立つ数学の話」、ニュートンプレス

涌井良幸：「高校生からわかるフーリエ解析」、ベレ出版

三谷政昭：「DFT, FFT, DCT の基礎と信号処理応用 やり直しのための信号数学」、CQ出版社

山下雄史(東京大学)：フーリエ解析、[【フーリエ解析】その1:フーリエ級数展開の基礎 ~フーリエサイン級数・フーリエコサイン級数・複素フーリエ級数まで - YouTube](#)

ヨビノリたくみ：フーリエ解析、[【大学数学】フーリエ解析入門①\(フーリエ級数展開 I\)/全5講【解析学】 - YouTube【大学数学】 - YouTube](#)

(株)小野測器：「基礎からの周波数分析(9) 高速フーリエ変換」、計測コラム第140号、[計測コラム emm140号用 \(onosokki.co.jp\)](#)

コグニカル：高速フーリエ変換、[高速フーリエ変換\(FFT\)とは - Cognicull](#)

新井仁之(東京大学)：離散コサイン基底、[画像処理の数学 フーリエの方法篇 No.2 離散コサイン基底 - YouTube](#)

武田祐一：フーリエ変換と画像圧縮、[2-3. フーリエ変換と画像圧縮 - 2015/3/27 - YouTube](#)

佐藤善啓(大阪大学)：画像圧縮(JPEG)、[Microsoft PowerPoint - multi media05-dct jpeg \[互換モード\] \(osaka-u.ac.jp\)](#)

吉田俊之(福井大学)：画像符号化、<http://www.pcsj-imps.org/archive/2013tutorial.pdf>