

制御工学(現代制御)の基礎知識

2021年 ver. 1.0
倉谷 隆博

1. システムの自由応答と安定性

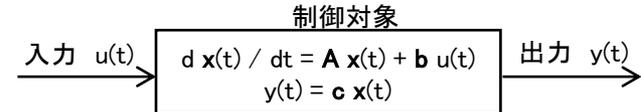
制御理論には古典制御理論と現代制御理論があり、いずれも微分方程式(数式モデル)で表される動的システムを扱う。古典制御理論は数式モデルをラプラス変換して伝達関数表現に置き換え、入出力の関係に着目し、主に周波数領域で制御系を設計する方法である。古典制御理論はPID制御を始めとして現場で幅広く使用されている。一方、現代制御理論(現代とは言うものの、1960年代に生まれた理論)は、数式モデルを行列とベクトルを使って状態空間で表現する方法であり、入出力関係だけではなくシステム内部の状態の変化にも着目して制御系を設計する手法である。現代制御理論によって制御理論の適用範囲が大きく広がった(付録13)。

■ 1入力1出力の状態空間表現

1入力1出力のシステム(制御対象)を図1に示す。
システムを、状態方程式(微分方程式)と観測方程式で表す。

$$\text{状態方程式: } \frac{d \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \quad \dots \text{ (式1)}$$

$$\text{観測方程式: } y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) \quad \dots \text{ (式2)}$$



$\mathbf{x}(t)$ ($n \times 1$): 状態ベクトル、 $u(t)$: 入力(スカラー)、 $y(t)$: 出力(スカラー)
 \mathbf{A} ($n \times n$), \mathbf{b} ($n \times 1$), \mathbf{c} ($1 \times n$): 係数
(図1) 動的システムの状態空間表現

■ 自由システムの応答(自由応答)

(式1)で入力 $u(t)$ がいないときの状態方程式は(式3)になり、 $\mathbf{x}(t)$ の初期値 $\mathbf{x}(0)$ からの挙動を自由応答、もしくは零入力応答という。

$$\frac{d \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad \dots \text{ (式3)}$$

自由応答 $\mathbf{x}(t)$ を求めるには、まず(式3)をラプラス変換して、 $s \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s)$ 、よって、 $\mathbf{X}(s) = (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0)$ を得る。この式を逆ラプラス変換にて時間領域の関係に戻して、 $\mathbf{x}(t)$ の挙動(式4)を求めることができる。なお、(式4)の $e^{\mathbf{A}t}$ を状態遷移行列と言う。

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} [(s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) \quad \dots \text{ (式4)}$$

(式4)から状態遷移行列の行列 \mathbf{A} が $\mathbf{x}(t)$ の挙動を決めていることが分かる。そこで、自由応答における行列 \mathbf{A} の役割を調べる。行列 \mathbf{A} の固有ベクトルを列ベクトルとする変換行列 \mathbf{T} を用意して、新しい状態ベクトルで $\mathbf{z}(t)$ を(式5)にて導入する。

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad \dots \text{ (式5)}$$

ただし、 λ_i : 固有値、 \mathbf{v}_i : λ_i に対応した固有ベクトル、 $\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$

(式5)を(式3)に代入して、

$$\frac{d \mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z}(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}(t) \quad \dots \text{ (式6)}$$

ただし、行列 $\mathbf{\Lambda}$ (λ の大文字)は、対角要素に行列 \mathbf{A} の固有値を持つ対角行列であり(付録1.14)、対角正準形と言う。よって、(式3)から(式4)を求めたように(式6)から(式7)が求まり、 $\mathbf{z}(t)$ の挙動を(式5)と(式7)で表すことができる。

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{z}(0) \quad \dots \text{ (式7)}$$

そして、(式7)の状態遷移行列の $\mathbf{\Lambda}$ は行列 \mathbf{A} の固有値からなる対角行列であるので、自由応答 $\mathbf{x}(t)$ を(式8)で表すことができる。

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \mathbf{z}(t) = z_1(0) e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + z_2(0) e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + z_n(0) e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n \quad \dots \text{ (式8)} \quad \text{この形を、自由応答のモード展開という。}$$

自由応答は、行列 \mathbf{A} の固有値 λ_i が影響する $e^{\lambda_i t}$ の項で発散する(不安定)か、0に収束するか(安定)が決まることが分かる。ここで $\lambda_i = a_i + j b_i$ (複素数)と置けば、 $e^{\lambda_i t} = e^{a_i t} (\cos b_i t + j \sin b_i t)$ (オイラーの公式)であるので、行列 \mathbf{A} の全ての固有値の実数(ここでは、 a_i)が全て負であれば、(式8)は0に収束する(システムは安定である)ことが分かる。

2. リアプノフ安定定理(自由システムの安定判別)

自由システムの応答の安定性は、前述のとおり係数行列 A の固有値を調べることによって判定できる。一方、リアプノフの安定判別法は微分方程式を解かなくても、非線形システムを含む自由システムの安定性判別を可能とする方法である。

■ **リアプノフ安定定理** (付録3) なお、正定行列に関しては付録1. 17)を、2次形式に関しては付録1. 16)を参照のこと
 システム $d \mathbf{x}(t) / dt = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$ が漸近安定である ($t \rightarrow \infty$ で、 $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$) ための必要十分条件は、任意の正定行列 \mathbf{Q} に対して、

リアプノフ方程式 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad \dots$ (式9)

を満たす正定行列 \mathbf{P} がただ一つ存在することである。このとき、この行列 \mathbf{P} を使った2次形式の $V(\mathbf{x})$ を用意する(式10)。

リアプノフ関数(スカラー) $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad \dots$ (式10)

$V(\mathbf{x})$ は、 $V(\mathbf{x}) > 0$ (正定)、 $dV(\mathbf{x}) / dt < 0$ (負定) の関数である。時間 $t \rightarrow \infty$ で $V(\mathbf{x})$ は小さくなっていき、 $\mathbf{x}(t)$ は原点に近づく。

(例) $d \mathbf{x}(t) / dt = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$ ここで、 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ であれば、行列 \mathbf{A} の固有値は -2 と -3 になる(三角行列の固有値は対角成分に等しい、付録1. 8))。

この状態方程式を解くと、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(0) e^{-2t} \\ x_2(0) e^{-3t} \end{bmatrix}$ であり、漸近安定なシステムであることが確認できる ($t \rightarrow \infty$ で、 $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$)。

さてここで、このシステムのリアプノフ方程式を解いて、対称行列 \mathbf{P} を求める。その際、行列 \mathbf{Q} を単位行列(正定である)に設定する。

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$ と置くと、リアプノフ方程式は、 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

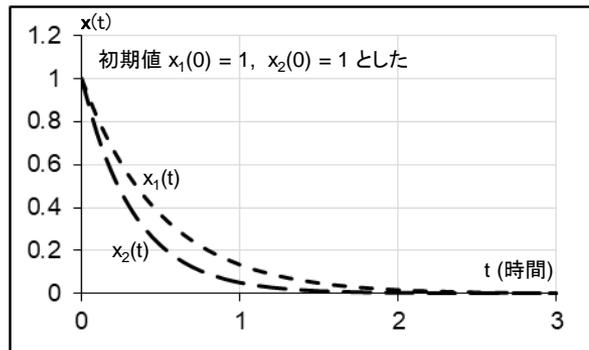
この式を解いて、 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ が求まる。なお、行列 \mathbf{P} の固有値を求めると 7 と 9 でいずれも正であるので、行列 \mathbf{P} は正定行列であることが分かる(付録1. 17))。

この行列 \mathbf{P} を用いてリアプノフ関数を求める。 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix} \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = (1/30) (8x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + 8x_2^2(t))$

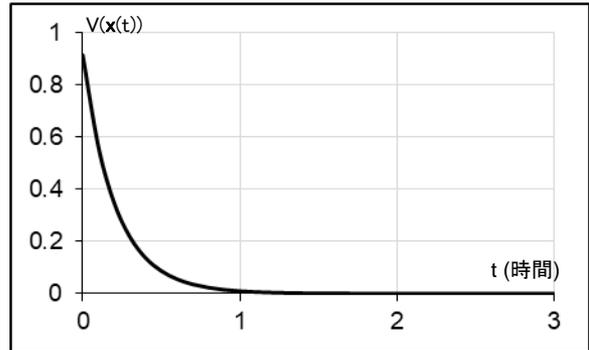
$V(\mathbf{x})$ に関して、以下を確認することができる。

$V(\mathbf{x}) = (1/30) \{ (x_1(t) + x_2(t))^2 + 7(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \} > 0$
 $dV(x_1(t))/dt = (\partial V(x_1(t))/\partial x_1(t)) (dx_1(t)/dt)$
 $= (1/30) (16x_1(0) e^{-2t} + 2x_2(0) e^{-3t}) (-2x_1(0) e^{-2t}) < 0$
 同様に、 $dV(x_2(t))/dt < 0$

(図2)は、状態量 $\mathbf{x}(t)$ の挙動である。時間の推移とともに $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ に近づいている。安定であることが分かる。一方、(図3)は $\mathbf{x}(t)$ に連動したリアプノフ関数 $V(\mathbf{x}(t))$ の時間推移である。0 に近づき留まっている。



(図2) 状態量の時間推移



(図3) リアプノフ関数の時間推移

3. 可制御性と可観測性

制御システムを構築するにあたっては、状態方程式(式1)と観測方程式(式2)で表されるシステムの特性を把握しておく必要がある。(式5)の変換行列 T を使う。係数行列 A を対角正準形(付録1. 14))に変換したシステム方程式を使って特性を把握する(表1)。

なお、変換後も入出力の関係を表す伝達関数は変わらない(表1下段)。

変換後の状態方程式は、微分方程式が状態変数ごとに分割されている。

原型では、例えば、 $d x_1(t) / dt$ の右辺は $x_1(t)$ と $x_2(t)$ で構成されているが、変換後の $d z_1(t) / dt$ は $z_1(t)$ だけで構成されている。システムがサブシステムごとに分割されている。この変換後のシステムで考えると、例えば $b_{t1} = 0$ であれば $z_1(t)$ は入力 $u(t)$ の影響を受けない、制御できないことが分かる。

一方、これとは別に、例えば $c_{t1} = 0$ であれば出力 $y(t)$ に状態変数 $z_1(t)$ が反映されない($z_1(t)$ を観測できない)ことが分かる。ここから可制御性、可観測性という考え方が生まれる。

(表1)システム方程式の特性把握

	原型	係数行列 A を対角正準形に変換
システム方程式	状態方程式: $d \mathbf{x}(t) / dt = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \dots$ (式1) 観測方程式: $y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) \dots$ (式2)	状態方程式: $d \mathbf{z}(t) / dt = \mathbf{A}_t \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_t u(t) \dots$ (式11) 観測方程式: $y(t) = \mathbf{c}_t \mathbf{z}(t) \dots$ (式12)
伝達関数	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$	$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_t = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{t1} \\ b_{t2} \\ \vdots \\ b_{tn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_t = \mathbf{c} \mathbf{T} = [c_{t1} \ c_{t2} \ \dots \ c_{tn}]$
1入力1出力 $n=2$ のとき	状態方程式: $d x_1(t) / dt = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + b_1 u(t)$ $d x_2(t) / dt = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + b_2 u(t)$ 観測方程式: $y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$	状態方程式: $d z_1(t) / dt = \lambda_1 z_1(t) + b_{t1} u(t)$ $d z_2(t) / dt = \lambda_2 z_2(t) + b_{t2} u(t)$ 観測方程式: $y(t) = c_{t1} z_1(t) + c_{t2} z_2(t)$
伝達関数	$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{b} U(s), \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ から $\mathbf{X}(s) = (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U(s)$ また、 $Y(s) = \mathbf{c} \mathbf{X}(s)$ よって、 $G(s) = Y(s) / U(s) = \mathbf{c} (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$	$s \mathbf{Z}(s) - \mathbf{z}(0) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{Z}(s) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} U(s), \mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$ から $\mathbf{Z}(s) = (s \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} U(s) = \{\mathbf{T}^{-1} (s \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} - \mathbf{A}) \mathbf{T}\}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} U(s)$ $= \{\mathbf{T}^{-1} (s \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{T}\}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} U(s) = \mathbf{T}^{-1} (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} U(s)$ $= \mathbf{T}^{-1} (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} U(s)$ $Y(s) = \mathbf{c} \mathbf{T} \mathbf{Z}(s)$ よって、 $G(s) = Y(s) / U(s) = \mathbf{c} (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$

■ 可制御性 (付録5)

有限時間で初期状態から任意の状態へ移行させるような入力が存在すれば、システムは可制御であるという。

(必要十分条件) 可制御性行列 M_C がフルランク(付録1. 12))

$$\text{rank } M_C = n \quad \text{ただし、} M_C = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{A}\mathbf{b} \\ \dots \\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \dots \quad (\text{付式13})$$

(例)

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき、 $M_C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ から、 $\text{rank } M_C = 2$ よって、可制御

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき、 $M_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ から、 $\text{rank } M_C = 1$ よって、不可制御

■ 可観測性 (付録6)

有限時間で入出力から初期状態を一意に定めることができればシステムは可観測であるという。

(必要十分条件) 可観測性行列 M_O がフルランク

$$\text{rank } M_O = n \quad \text{ただし、} M_O = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \dots \quad (\text{付式14})$$

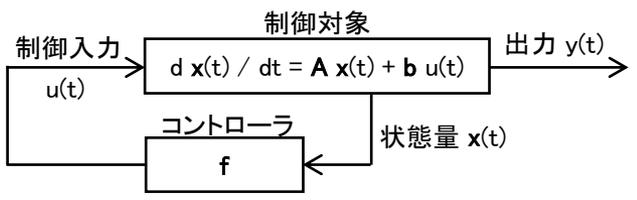
(例)

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \ 0]$ のとき、 $M_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ から、 $\text{rank } M_O = 2$ よって、可観測

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [0 \ 1]$ のとき、 $M_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ から、 $\text{rank } M_O = 1$ よって、不可観測

4. 状態フィードバック制御の極配置

システムの制御方法として状態量を制御入力に反映させる**状態フィードバック**(図4)が知られている(なお、出力を制御入力に使用する方法は出力フィードバックという)。(図5)に示すように、**システムが可制御であって全ての状態量が計測可能であれば、安定な状態フィードバックを構築できる**。また全ての状態量が計測できない場合であっても、システムが可観測であればオブザーバ(後述)を導入することによって状態量が推定可能になり、同様に安定な状態フィードバックを構築できる。



(図4) 状態フィードバック

状態方程式: $\frac{d x(t)}{d t} = \mathbf{A} x(t) + \mathbf{b} u(t) \dots$ (式1)

観測方程式: $y(t) = \mathbf{c} x(t) \dots$ (式2)

さて、状態フィードバック制御は(式15)に示すようにシステムの制御入力として状態量 $x(t)$ を使用する制御方法である。

$u(t) = \mathbf{f} x(t)$ 但し、 $\mathbf{f} = [f_1 \dots f_n]$ は**フィードバックゲイン**(ベクトル) \dots (式15)

このとき、(図4)のシステムは、

$\frac{d x(t)}{d t} = \mathbf{A} x(t) + \mathbf{b} u(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{f}) x(t) \dots$ (式16)

この式から、システムの係数 $\mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{f}$ の特性方程式の根(極)の実部が負になるように \mathbf{f} を設定すれば安定な制御システムを構築できることが分かる。極配置の方法(\mathbf{f} の設定方法)を例に示すが、**可制御正準系を使用した方法とアッカーマンの方法**は付録7、8、9に示す。

(例)

(式1)、(式2)の \mathbf{A} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} が下記の場合を考える。なお、このシステムの極は1と2(正)でシステムは不安定である。ここでは、不安定なシステムであっても安定な状態フィードバックを構築できることを示す(なお、システムは可制御、可観測である)。

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = [0 \ 1]$ $\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $\text{rank } \mathbf{M}_c = 2$ によって、可制御 $\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\text{rank } \mathbf{M}_o = 2$ によって、可観測

ここで、フィードバックゲイン $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2]$ を求める。

(式16)の特性方程式は、

$|\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{f})| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 - 2f_1 & \lambda - 3 + 2f_2 \end{vmatrix}$
 $= \lambda^2 + (2f_2 - 3)\lambda + (2f_1 + 2) = 0$

一方、状態フィードバックの望ましい極配置を-2と-3(いずれも負で安定)に設定すれば、この特性方程式は、

$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

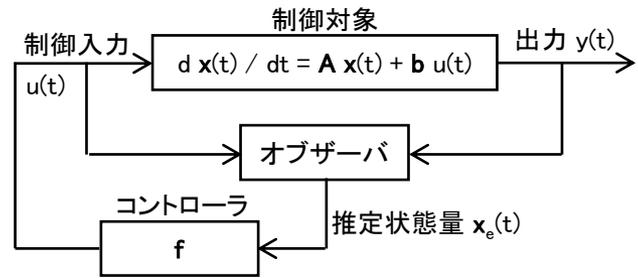
よって、この2つの特性方程式の係数が等しくなるように \mathbf{f} を定める。 $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2] = [2 \ 4]$ が求まる。

可制御か?		
Yes		No
全ての状態量が計測(入手)可能か?		
Yes	No	
↓	可観測か?	
	Yes	No
安定な状態フィードバック制御系の構築が可能	オブザーバ+状態フィードバックで安定な制御系の構築が可能	安定な制御の構築は不可能

(図5) 制御の可否判断

5. オブザーバ(状態観測器)と状態フィードバック

■オブザーバ: 状態フィードバックを構築するにあたって、**全ての状態量が計測できない場合**、(図6)に示すように**オブザーバを導入することによって状態量が推定可能になり、安定な状態フィードバックを構築できるようになる。**



(図6)オブザーバを使った状態フィードバック

状態量 $x(t)$ を計測できないとき、システムが可観測であれば制御入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ を使用して推定できる。この推定アルゴリズムを**オブザーバ**と呼ぶ(式17)。

$$d x_e(t) / dt = A x_e(t) + b u(t) + h \{ c x_e(t) - y(t) \} \cdots \text{(式17)}$$

ここで、 $x_e(t)$ は推定した状態量、 h は**オブザーバゲイン**(ベクトル)

この式は、状態方程式を使った推定である $A x_e(t) + b u(t)$ に推定出力の誤差 $c x_e(t) - y(t)$ を加味して(その加減は h)、 $x(t)$ を推定することを示している。

ここで、推定誤差 $e(t) = x_e(t) - x(t)$ の収束具合は、 $e(t)$ を微分して判断できる。

$$\begin{aligned} d e(t) / dt &= d (x_e(t) - x(t)) / dt = d x_e(t) / dt - d x(t) / dt = A x_e(t) + b u(t) + h \{ c x_e(t) - y(t) \} - \{ A x(t) + b u(t) \} \\ &= A (x_e(t) - x(t)) + h (c x_e(t) - y(t)) = A (x_e(t) - x(t)) + h (c x_e(t) - c x(t)) = (A + h c) e(t) \cdots \text{(式18)} \end{aligned}$$

(式18)より、 $e(t) = e^{(A+hc)t} e(0) \cdots \text{(式19)}$

よって、行列 $(A + h c)$ の全ての固有値の実部を負にするように h を設定すれば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ つまり、 $x_e(t)$ を $x(t)$ に一致させることができる。ただ、速やかに一致させることが意味のある推定と言えるので、 $(A + h c)$ の固有値はシステムの係数行列 A の固有値より虚軸から離れた負側に配置する必要がある(早く収束させる)。

(例)前例のシステムで、オブザーバの極を、 -1 と -2 に設定したときの、オブザーバゲイン $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ を求める。

特性方程式は、 $|\lambda I - (A + h c)| = \begin{vmatrix} \lambda & -(1 + h_1) \\ 2 & \lambda - (3 + h_2) \end{vmatrix} = \lambda^2 - (3 + h_2)\lambda + 2(1 + h_1) = 0$

$-1, -2$ と極設定したときの特性方程式は、 $(\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ 特性方程式の係数比較で、 $h_1 = 0, h_2 = -6$ となる。

■オブザーバを使用した状態フィードバック(図6): 制御入力は、 $u(t) = f x_e(t)$ であるので、これを(式1)に付代入すると、

$$d x(t) / dt = A x(t) + b f x_e(t) = A x(t) + b f (x(t) + e(t)) = (A + b f) x(t) + b f e(t) \cdots \text{(式20)}$$

(図6)は、(式18)と(式20)から構成されているので、全体のシステムの特性は次式で表される。

$$d / dt \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + b f & b f \\ 0 & A + h c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad \text{よって、この式の係数行列(ブロック行列)の固有値は以下の通り(付録1. 18))。}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I - (A + b f) & -b f \\ 0 & \lambda I - (A + h c) \end{vmatrix} = |\lambda I - (A + b f)| |\lambda I - (A + h c)| = 0 \cdots \text{(式21)}$$

(式21)から、**状態フィードバックの極 $|\lambda I - (A + b f)|$ とオブザーバの極 $|\lambda I - (A + h c)|$ は、独立して設定できることが分かる。**

6. 最適レギュレータ (Linear Quadratic Regulator)

状態フィードバックのゲインを設計するとき極配置を行うが、その明確な指針はない。これに対して、最適レギュレータは設計指針として評価関数を導入し、これを最適化(ここでは、最小化)することによって状態フィードバックのゲインを決定するという方法である。

評価関数 $J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$ ただし、 Q, R は重み行列を表す。 ... (式22)

この2次形式(付録1. 16))の評価関数を最小にする状態フィードバックゲインを求める。第1項は応答性に関連し $x(t)$ の値が小さいほど早く収束することを示す。第2項は操作量に関連し、 $u(t)$ の値が小さいほど操作量(投入エネルギー)を抑えた制御になる。応答性と操作量はトレードオフの関係であり、重み行列の値で調整することになる。重みを大きくするほどその項目を重視することになる。

評価関数(式22)を最小化する最適ゲイン(式24)は、(式23)のリカッチ方程式から**正定対称行列 P** を求めて計算する(付録10)。

リカッチ方程式: $PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$... (式23)

状態フィードバックの最適なゲインを K_p として $K_p = -R^{-1}B^T P$... (式24) 最適操作量は、 $u(t) = K_p x(t)$... (式25)

また、そのときの評価関数の値(最小値)は、 $x(0)^T P x(0)$... (式26)

(例) 有本・ポッター法(行列 P を求めないで最適ゲインを計算する方法)は、付録11にまとめておいた。

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$ (対称行列) $Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $R = 1$ のとき、

・可制御性の確認
 $M_c = \begin{bmatrix} B \\ AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$x^T Q x = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 6x_2^2$ (x_2 の収束の重みは x_1 の2倍)、 $u^T R u = r u^2(t) = u^2(t)$ (1入力)

リカッチ方程式は、 $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 [0 \ 1] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 0$

このリカッチ方程式から、次の連立方程式が求まる。

$p_{12}^2 + 2 p_{12} - 3 = 0$
 $p_{11} - p_{12} - p_{22} - p_{12} p_{22} = 0$
 $p_{22}^2 - 2 p_{12} + 2 p_{22} - 6 = 0$

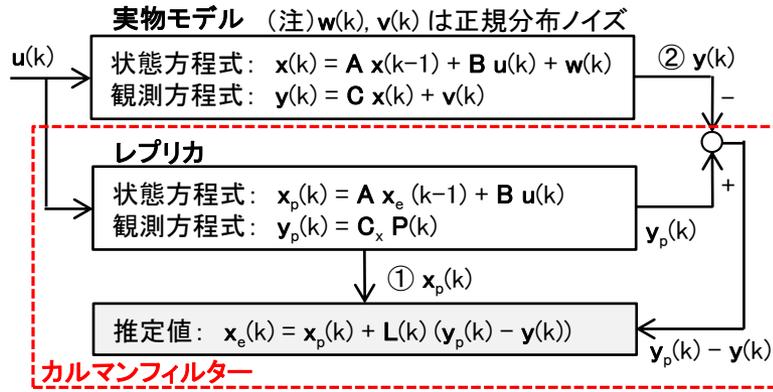
この連立方程式を解いて、行列 P の候補が4つ求まる。 $P = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
 行列 P は正定対称行列である。

このなかで、全ての固有値が正である対称行列は正定である(付録1. 17))に該当するのは下記の行列である

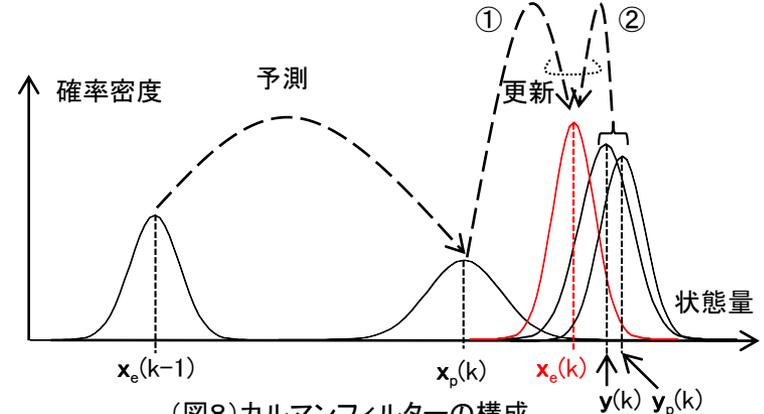
$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 行列 P が求まったので、最適ゲインは、 $K_p = -R^{-1} B^T P = 1 [0 \ 1] \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -[1 \ 2]$

7. カルマンフィルタ

カルマンフィルタはオブザーバと同じく状態量を推定するアルゴリズムであるが、ノイズが存在する下で状態量を推定する離散系でのアルゴリズムである。推定量誤差が最小になるように最適化したオブザーバである(参照、別途資料、ベイズ統計のカルマンフィルタ)。



(図7)カルマンフィルタの構成



(図8)カルマンフィルタの構成

(図7)はカルマンフィルタの構成図である。実物モデルには、プロセスノイズ $w(k)$ と観測ノイズ $v(k)$ が含まれる。状態量を推定するにあたって実物モデルのレプリカを用意する。レプリカを使って予測した状態量 $x_p(k)$ と実物モデルとレプリカの出力差 $y_p(k) - y(k)$ を用いて状態推定量 $x_e(k)$ を推定する。この考え方を示したのが(図8)である。カルマンフィルタは「予測」と「更新」の2ステップから成る。(図9)にカルマンフィルタのアルゴリズムを示す。(図10)に示すように状態推定量と誤差共分散行列の予測と更新を繰り返す。

■ 予測

事前状態推定量: $x_p(k) = A x_e(k-1) + B u(k)$
 $x_p(k)$ の誤差の共分散: $P_p(k) = A P(k-1) A^T + W$

■ 更新

観測量の誤差の共分散: $S(k) = C P_p(k) C^T + V$
 カルマンゲイン: $L(k) = -P_p(k) C^T S(k)^{-1}$
 事後状態推定量: $x_e(k) = x_p(k) + L(k) (C x_p(k) - y(k))$
 $x_e(k)$ の誤差の共分散: $P(k) = (I + L(k) C) P_p(k)$

(図9)カルマンフィルタのアルゴリズム

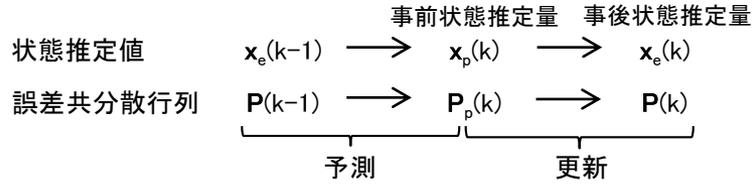
カルマンフィルタの構成要素の導出方法は、付録12にまとめておいた。

1) 予測ステップ

事後状態推定量 $x_e(k-1)$ (初期値は適当な値) を使って、事前状態推定量 $x_p(k)$ を求める。合わせて、 $x_p(k)$ の誤差共分散 $P_p(k)$ を求める。

2) 更新ステップ

$P_p(k)$ を使って観測量の誤差の共分散 $S(k)$ を求める。次いで、 $P_p(k)$ と $S(k)$ を使ってカルマンゲイン $L(k)$ を求める。 $L(k)$ は $x_e(k)$ の誤差の共分散 $P(k)$ を最小にする。この $L(k)$ と $x_p(k)$ を使って、事後状態推定量 $x_e(k)$ を求める。合わせて、次の予測で使用する、事後状態推定量 $x_e(k)$ の誤差の共分散 $P(k)$ を更新する。カルマンフィルタはこの2つのステップを繰り返すアルゴリズムである。



(図10)予測と更新の流れ

なお、観測誤差 $v(k)$ が 0 である場合、つまり観測誤差がなく観測値を信頼できる場合 ($V = 0$)、 $L(k) = -1/C$ となり、 $x_e(k) = y(k)$ となる。つまり推定値は観測値そのものになる。一方、事前状態推定量の誤差の共分散が 0 である場合、つまり $P_p(k) = 0$ であるので、 $L(k) = 0$ となり、 $x_e(k) = x_p(k)$ となる。つまり、事後状態推定量は事前状態推定量に等しくなる。結局、 $L(k)$ が(図7)と(図8)の①と②を加味する具合を決めていることになる。推定誤差の共分散が最小になるように決めている。

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (1/10)

1) 零行列 (nilpotent matrix)

要素が全て 0 の行列を零行列という。零行列は、 $\mathbf{0}$ で表す。

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) 対角行列 (diagonal matrix)

行と列の要素の数が等しい**正方行列** (square matrix) において、行と列の番号が同じ対角要素以外の要素が 0 の行列を対角行列という。また、対角行列の対角要素が全て 1 の行列を**単位行列** (unit matrix) という。単位行列は、 \mathbf{I} で表す。

(例)

単位行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) 転置行列 (transposed matrix)

もとの行列 \mathbf{A} の要素の行と列の位置を入れ替えて作った行列を転置行列といい、 \mathbf{A}^T , \mathbf{A}' などで表す。

(例)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{のとき、} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4) 対称行列 (symmetric matrix)

$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ を満たすような、つまり、転置行列 \mathbf{A}^T がもとの行列 \mathbf{A} と等しくなる行列を対称行列という。正方行列になる。

(例)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (2/10)

5) 逆行列 (inverse matrix)

2つの正方行列 A と B の積 AB が $AB=I$ を満たすとき、 B を A の逆行列と言って、 A^{-1} で表す。よって、 $AA^{-1}=I$ となる。
 なお、逆行列が存在する行列を、**正則行列** (regular matrix) と呼ぶ。

(例) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ のとき $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ よって、 $AA^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

■ 逆行列の求め方

$n \times n$ の正方行列 A で、 i 行と j 列を省いて詰めて $(n-1) \times (n-1)$ の正方行列を作り、その行列式に符号 $(-1)^{i+j}$ を掛けたものを行列 A の **余因子** (cofactor) A_{ij} という。

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

そして、これらの余因子を並べた行列をつくり、それを転置した行列を**余因子行列** (cofactor matrix) $\text{adj}(A)$ という。

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

また、行列 A の行列式 $|A|$ は i 行の余因子 A_i を使って、 $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ (i は $1, \dots, n$ の任意の整数) で求めることができる。
 行列 A の要素 $a_{11} = 1, a_{12} = 3, a_{13} = 1$ と、余因子 $A_{11} = -4, A_{12} = 2, A_{13} = 2$ を使って、 $|A| = 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4$ となる。

(付式1)が**逆行列を求める公式**である。

この公式を使用して逆行列を求める。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \quad \dots \quad (\text{付式1})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (3/10)

6) 直交行列 (orthogonal matrix)

$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ を満たすような、つまり、転置行列と逆行列が等しくなる ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ を満たす) ような正方行列を直交行列という。
なお、直交行列 \mathbf{A} の列ベクトルは直交し (内積 = 0)、直交行列の転置行列は逆行列に等しい。

(例)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ は直交行列である。 確認、 } \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7) 行列の固有値

$n \times n$ の正方行列 \mathbf{A} に対して、固有方程式

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad \dots \text{ (付式2)}$$

を満たす $n \times 1$ の列ベクトル \mathbf{v} (ただし、 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) と、定数 λ が存在するとき、
 λ を行列 \mathbf{A} の固有値 (eigen value)、 \mathbf{v} を固有値 λ に対応した固有ベクトル (eigen vector) という。
ここで上式を変形して、 $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ であるが、 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ であることから、 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ が導かれる。
この n 次方程式を行列 \mathbf{A} の特性方程式といい、解を固有値という。次いで、特性方程式に固有値を代入して固有ベクトルを求める。
なお、行列 \mathbf{A} の行列式の値 $|\mathbf{A}|$ は、固有値の積と等しくなることが知られている。 $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

(例)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ のとき、}$$

$$\text{特性方程式は、 } |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6) + 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$

よって、固有値は $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ となる。

まず、固有値 $\lambda_1 = 2$ の固有ベクトルを求める。 $\lambda_1 = 2$ を固有方程式に代入すると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

この式から $v_1 = 2 v_2$ が求まる。ノルム (付録1. 11)) が 1 になるような固有ベクトルを求める。

同様に $\lambda_2 = 5$ の固有ベクトルを求める。 •固有値が 2 のときの固有ベクトル •固有値が 5 のときの固有ベクトル

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (4/10)

8) 三角行列 (triangular matrix)

対角線要素の下の成分が全て 0 の要素から成る行列を上三角行列といい、逆に対角線要素の上の成分が全て 0 の要素からなる行列を下三角行列という。なお、上三角行列であり、かつ下三角行列である行列は対角行列になる。

・上三角行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

・下三角行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

・三角行列の行列式は対角成分の積に等しい。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

・三角行列の固有値は対角成分に等しい。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \text{ の固有値は、 } \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) = 0 \text{ より、固有値は、} a_{11}, a_{22}, a_{33}$$

9) 正方行列の三角化

全ての正方行列 A は、ある適当な正則行列 T を用意することで、 $T^{-1} A T$ を三角行列にすることができる。

(例)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ のとき、特性方程式は、 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 1) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

固有値は $\lambda = 2$ (重根) となり、固有値に対応した固有ベクトルと、この固有ベクトルと平行でないベクトルを適当に用意する。ついで、これらを列ベクトルとする行列を作りこれを行列 T とし、この行列を使って行列 A を変換する。なお、行列 A は行列の次数(この場合、2)に見合った数の固有値を持たないので、後述の 14) の対角化はできない。

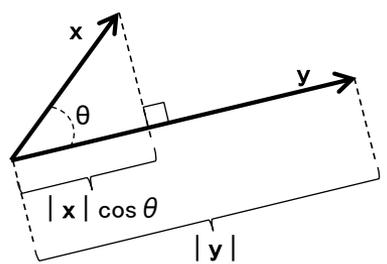
$$\text{正規化した固有ベクトル: } \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{平行でないベクトル: } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{よって、} T^{-1} A T = -\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ これによって、上三角行列に変換できた。なお、対角要素は固有値に等しい。}$$

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (5/10)

10) 内積 (inner product)

ベクトルの積を計算する方法のひとつで、ベクトルの向きを合わせた上でベクトルの長さの積を計算する。これを内積という。



(付図1) 内積

ベクトル x と y の内積は $x \cdot y$ とか $\langle x, y \rangle$ で表す。
代数学的な内積の表現方法を(付式3)に示す。

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \dots \text{(付式3)}$$

また、内積の幾何的な表現を $n = 2$ のとき、(付図1)と(付式4)で示す。
このとき、(付式3)の計算結果と(付式4)の計算結果は同じになる。

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad \dots \text{(付式4)}$$

ただし、 $\|x\|$ はノルム(後述)

ここで、 $\theta = 90^\circ$ のとき、 $\cos 90^\circ = 0$ より、 $\langle x, y \rangle = 0$ となる。
つまり、 x と y が直交するとき、 x と y の内積は 0 になる。

11) ノルム (norm)

ベクトルの幾何学的な長さの概念であり、内積を使って次式で表される。

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \dots \text{(付式5)}$$

12) 行列のランク(階数)

行列の各列(あるいは、各行)をそれぞれベクトルとみなしたとき、独立なベクトルの数、つまり他のベクトルを使って線形結合で表現できないベクトルの数をそのベクトルのランクという。

ベクトル A のランクが m のとき、 $\text{rank}(A) = m$ と表す。

行列 A の次数とランクが同じときは、行列 A はフルランクであるという。

なお、**行列 A の逆行列が存在する、つまり行列式 $|A| \neq 0$ 、行列 A が正則行列であるときは、行列 A はフルランクである。**

13) 実対称行列(要素が実数の対称行列)の固有値と固有ベクトル

・実対称行列の固有値は実数である。

$$Ax = \lambda x \text{ より、} x^*(Ax) = x^*(\lambda x) = \lambda x^*x = \lambda \|x\|^2$$

一方、実対称行列の共役転置 A^* (記号 $*$ は共役転置を示す) はもとの行列 A と等しい($A^* = A$ である)ので、

$$\text{また、} (x^*A)x = (A^*x)^*x = (Ax)^*x = (\lambda x)^*x = \overline{\lambda} x^*x = \overline{\lambda} \|x\|^2 \text{ (なお、} \lambda \text{ は複素共役で、} \lambda^* = \overline{\lambda} \text{)}$$

よって、 $\|x\|^2(\lambda - \overline{\lambda}) = 0$ となるが、 $\|x\|^2 \neq 0$ より、 $\lambda = \overline{\lambda}$ となり、固有値 λ は実数であることが分かる。

・実対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する。

異なる2つの固有値 λ_1 と λ_2 に対して、それぞれ $Ax = \lambda_1 x$ 、 $Ay = \lambda_2 y$ であることから、 x と y の内積に関して、

$$\lambda_1 \langle x, y \rangle = \langle \lambda_1 x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, \lambda_2 y \rangle = \lambda_2 \langle x, y \rangle$$

よって、 $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle x, y \rangle = 0$ ここで $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので、 $\langle x, y \rangle = 0$ つまり、異なる固有値の固有ベクトル x と y とは直交する。

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (6/10)

14) 行列の対角化

正方行列 A の固有値 λ_i が重複しないとき、固有値 λ_i に対応する固有ベクトル v_i から成る変換行列 T を使用して、行列 A をその固有値 λ_i を対角成分とする対角行列 Λ (λ の大文字) に変換することができる。

$$\begin{aligned}
T^{-1}AT &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda
\end{aligned}$$

つまり、

$$T^{-1}AT = \Lambda \quad \cdots \text{ (付式6)}$$

(例)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ のとき、}$$

この行列 A は、付録1. の7) で使った行列である。

行列 A の固有値は、 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ であり、固有値に対応した固有ベクトルから成る行列 T は下記の通りである。

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{よって、逆行列は、} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{5}{3} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

これより、対角化した行列が求まる。対角要素は、固有値 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ と等しいことを確認できる。

$$T^{-1}AT = \frac{5}{3} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \Lambda$$

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (7/10)

15) 対称行列の対角化

行列 A が対称行列のときには、変換行列 T は直交行列になる。

$$T^{-1} A T = \Lambda$$

(例)

対称行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき、

$$\text{特性方程式は、} |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

よって、固有値は $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ となる。

まず、固有値 $\lambda_1 = -1$ の固有ベクトルを求める、 $\lambda_1 = -1$ を固有方程式に代入すると、

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

この式から $v_1 = -2v_2$ が求まる。ノルム(後述)が 1 になるような固有ベクトルを求める。同様に $\lambda_2 = 4$ の固有ベクトルを求める。

- ・固有値が -1 のときの固有ベクトル
- ・固有値が 4 のときの固有ベクトル

$$v = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

よって、 $T = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ よって、逆行列は、 $T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^{-1} = - \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

ここで、 $T^T = T^{-1}$ であるので、変換行列 T は直交行列である。

そして、下記に示すように対称行列 A は直交行列 T を使って、対角要素に固有値を持つ対角行列 Λ に変換できる。

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \Lambda$$

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (8/10)

16) 2次形式 (quadratic form)

係数が実数の多項式で項が全て2次の項であるものを2次形式という。2次形式は、対称行列 A とベクトル x を使用して(付式7)のように表すことができる。例えば、 $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$ は2次形式の多項式である。

$$x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \cdots \text{ (付式7)}$$

ここで、 $x = T y$ として、対称行列 A を直交行列 T によって対角行列 Λ に対角化(対角要素は行列 A の固有値)すると、固有値を係数とした2乗項だけの2次形式の多項式を得ることができる。

$$x^T A x = (T y)^T A (T y) = y^T T^{-1} A T y = y^T \Lambda y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad \cdots \text{ (付式8)}$$

17) 正定行列 (positive definite matrix)

対称行列 A と任意のベクトル x に対して2次形式 $x^T A x \geq 0$ が成立するとき、行列 A は半正定行列であるといい、 $A \geq 0$ と表す。その上、 $x = 0$ のときに限って $x^T A x = 0$ が成立するとき、行列 A は正定行列であるといい、 $A > 0$ と表す。同様に、半負定行列は $A \leq 0$ で、負定行列は $A < 0$ で表す。

(例)

$$\text{対称行列 } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ のとき、 } x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

そして、この式は、 $x = 0$ つまり、 $x_1 = 0, x_2 = 0$ のときに限って0になるので、行列 A は正定行列である。

■ 対称行列の全ての固有値が正であれば、その対称行列は正定行列である(下記はこの説明であるが、逆も真である)。

対称行列 A は直交行列 T を使用して対角化することができる($A = T \Lambda T^{-1}$)。対角行列 Λ は対角要素に行列 A の固有値 λ_i を持つ。ここで、固有値は非負、つまり $\lambda_i \geq 0$ の場合を考える。そこで、 $x = T y$ とおくと、

$$x^T A x = (T y)^T (T \Lambda T^{-1}) (T y) = (y^T T^{-1} T) \Lambda (T^{-1} T y) = y^T \Lambda y = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \geq 0$$

となり、行列 A は半正定行列になる。

しかし、この式は $\lambda_k > 0$ (全ての固有値が正) のとき、 $y_k = 0$ のときに限って0になるので、この対称行列 A は正定行列である。

(例)

$$\text{対称行列 } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ のとき(固有値は3と5でいずれも正)、 } x^T A x = 3x_1^2 + 3x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

この式 $x^T A x$ は、 $x = 0$ の時に限って0になる。よって、行列 A は正定行列である。

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (9/10)

18) ブロック行列 (block matrix)

1つの行列をいくつかの行列に分けて表すとき、それぞれの行列をブロック行列と呼ぶ。

(例)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 3 & | & 1 \\ \hline 2 & 0 & | & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$
 のとき、ブロック行列は、(一例) $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A_{21} = [2 \ 0]$, $A_{22} = [-1]$

行列の積の計算は、ブロック行列を使用して行うことができる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 3 & | & 1 \\ \hline 2 & 0 & | & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ -1 & 0 & | & 1 \\ \hline 3 & 2 & | & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [3 \ 2] \\ [2 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + [-1] [3 \ 2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-2] \\ [2 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + [-1] [-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

■ ブロック行列の行列式

$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ (A, B, C, D はブロック行列) として、行列 T の行列式を求める。行列 I は単位行列、行列 0 は零行列を表す。

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

第1式と第3式の左右に新たな行列式をかけて、

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

(参考)

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} = |A|$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A| |D|$$

よって、行列 T の行列式は、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$= |A| |D - CA^{-1}B| \quad \dots \text{(付式9)}$$

付録1. 行列とベクトルの基礎知識 (10/10)

19) 分散共分散行列 (covariance matrix)

データのばらつき具合を表す分散の概念を多次元確率変数に拡張した行列である。

p 個の要素からなる n 個の確率変数ベクトル $\mathbf{x}_1 = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p}]$, \dots , $\mathbf{x}_n = [x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np}]$ に対して、第 ij 成分 ($i, j = 1, 2, \dots, n$) が σ_{ij} (共分散)、ただし $i=j$ のとき σ_i^2 (分散) である $n \times n$ 行列を分散共分散行列 (付式10) という。

$$\begin{bmatrix}
 \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdot & \sigma_{1n} \\
 \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdot & \sigma_{2n} \\
 \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 & \cdot & \sigma_{3n} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \sigma_{3n} & \cdot & \sigma_{nn}^2
 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (\text{付式10})$$

ここで、 $\sigma_{ij}^2 = \{ \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \mu_i)(x_{jk} - \mu_j) \} / n = E [(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]$

μ_i, μ_j はベクトル $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ の平均値
E は期待値を表す。

分散共分散行列には、以下の特徴がある。

- ・分散共分散行列は、(付式11)の相関係数の定義式に使用されているように、**共分散は2変数間の相関**を表している。
- ・分散共分散行列は、**対称行列**である。
- ・**確率変数が互いに独立なときは無相関になり、共分散は全て0になる。**
つまり、このとき、分散共分散行列の非対角要素は全て0の対角行列になる。なお、対角要素には分散が並ぶ。
このとき、対角要素の分散の総和を、全ての確率変数のばらつきの大きさと捉えることができる。
(注) 行列 A の対角成分の総和を対角和(trace)と呼び、tr A と表す。

(参考)

相関係数 $\rho(x_i, x_j) = \text{Cov}(x_i, x_j) / (\sigma_i \sigma_j) \quad \dots \quad (\text{付式11})$

ここで、 $\text{Cov}(x_i, x_j) = \sigma_{ij}$ (共分散)

σ_i, σ_j は標準偏差 (σ_i^2, σ_j^2 は分散) で、 $\sigma_i^2 = \{ \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \mu_i)^2 \} / n$, $\sigma_j^2 = \{ \sum_{k=1}^n (x_{jk} - \mu_j)^2 \} / n$

付録2. 自由応答

■自由システムの応答(自由応答)

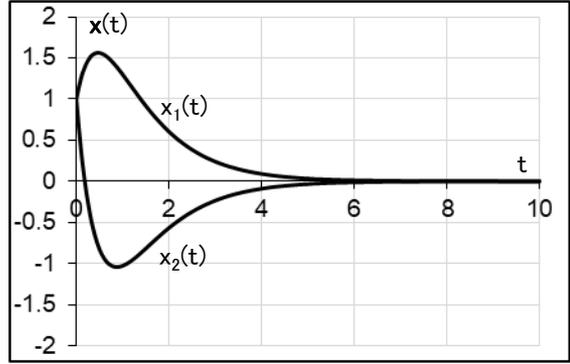
$\dot{x}(t) = A x(t)$ の自由応答を求める。

(例) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ のとき、 $(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -3 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/(s+1) - 2/(s+2) & 2/(s+1) - 2/(s+2) \\ -3/(s+1) + 3/(s+2) & -2/(s+1) + 3/(s+2) \end{bmatrix}$

ここから、 $e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$

よって、 $x(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} (3x_1(0) + 2x_2(0))e^{-t} + (-2x_1(0) - 2x_2(0))e^{-2t} \\ (-3x_1(0) - 2x_2(0))e^{-t} + (3x_1(0) + 3x_2(0))e^{-2t} \end{bmatrix}$

(付図2)に自由応答 $x(t)$ の様子を示す ($x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$ とした)。



(付図2) 自由応答の様子

■自由応答のモード展開

上記の状態方程式の自由応答を、行列 A の固有値を使ってモード展開する。

(例2) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 4) + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

より、行列 A の固有値 λ は -1 と -2 である。また、それぞれの固有ベクトルは、 $v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$

$z(t) = T^{-1} x(t)$ とおいて、変換行列は、 $T = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{13} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$ T の逆行列は、 $T^{-1} = \sqrt{26} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{13} & -3/\sqrt{13} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

よって、行列 A を対角化した対角行列 Λ は、 $\Lambda = T^{-1} A T = \sqrt{26} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{13} & -3/\sqrt{13} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{13} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

対角行列 Λ の対角要素は、行列 A の固有値 -1 と -2 であることが確認できる。
以上から、 $x(t)$ の挙動(自由応答)を、行列 A の固有値を使用して下記に示すように表すことができる(自由応答モードの展開)。

$x(t) = T z(t) = T e^{\Lambda t} z(0) = [v_1 \ v_2] \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = z_1(0) e^{-t} v_1 + z_2(0) e^{-2t} v_2$

付録3. リアプノフ安定定理の確認

■システムが漸近安定であれば、リアプノフ方程式が成立し、リアプノフ関数が存在する(システムが線形の場合を示す)。

システムの固有値を反映した状態遷移行列 e^{At} を使用して、 $P = \int_0^{\infty} (e^{At})^T Q e^{At} dt \dots$ (付式12) を用意する。

システムが漸近安定であれば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$ であるので、この P は収束し、また $Q > 0$ (正定)なので、 $P > 0$ (正定)である。

ここで、 P がリアプノフ方程式の解になっていることを確認する。まず、リアプノフ方程式に P を代入する。

$$A^T P + P A = \int_0^{\infty} \{ A^T (e^{At})^T Q e^{At} + (e^{At})^T Q e^{At} A \} dt = 0 + \int_0^{\infty} [d/dt \{ (e^{At})^T Q e^{At} \}] dt = [(e^{At})^T Q e^{At}]_0^{\infty} = 0 - Q = -Q$$

よって、 P はリアプノフ方程式の解であることが分かる。また、 P と異なる別の解 S が存在すると仮定しても、

$$P = - \int_0^{\infty} (e^{At})^T Q e^{At} dt = - \int_0^{\infty} (e^{At})^T (A^T S + S A) e^{At} dt = - \int_0^{\infty} [d/dt \{ (e^{At})^T S e^{At} \}] dt = - [(e^{At})^T S e^{At}]_0^{\infty} = - (0 - S) = S$$

解 S は解 P と同じになる。つまり、リアプノフ方程式の解はただ一つしかないのである。

よって、行列 P を使って2次形式のリアプノフ関数を設定できる。

■リアプノフ方程式を満足する正定な $P > 0$ がただ一つ存在すれば、システムは漸近安定である。

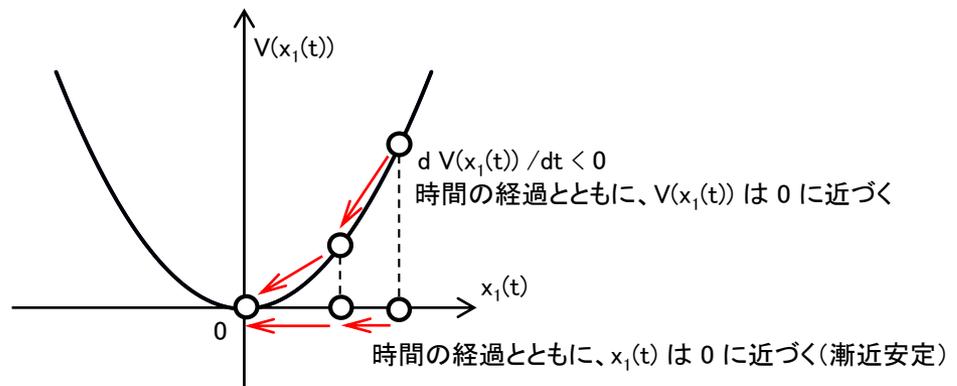
P が正定であれば、リアプノフ関数 $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ は正定である。また、 $Q > 0$ (正定)であるとする。

$d x(t) / dt = A x(t)$ であり、

$P = P^T$ (対称行列), $x^T(t) P A x(t) = (x^T(t) P A x(t))^T = x^T(t) A^T P x(t)$ (計算結果はスカラーであり、転置しても等しい)に注意して、

$$\begin{aligned} d V(x(t)) / dt &= \{ \partial V(x(t)) / \partial x(t) \} (d x(t) / dt) = \{ \partial (x^T(t) P x(t)) / \partial x(t) \} A x(t) = 2 x^T(t) P A x(t) \\ &= x^T(t) P A x(t) + (x^T(t) P A x(t))^T = x^T(t) P A x(t) + x^T(t) A^T P x(t) = x^T(t) (P A + A^T P) x(t) = - x^T(t) Q x(t) < 0 \end{aligned}$$

よって、 $V(x(t)) > 0$ であり、かつ $d V(x(t)) / dt < 0$ であるので、システムは漸近安定である(付図3)。



(付図3)リアプノフ関数のイメージ (状態変数が1つのとき)

付録4. ケーリー・ハミルトンの定理 (Cayley-Hamilton theorem)

■ケーリー・ハミルトンの定理

$n \times n$ の正方行列 A の固有多項式 $\Phi(x) = |xI - A|$ に行列 A を代入すると、 $\Phi(A) = 0$ (零行列) になる。 ... (付式13)

注意: $\Phi(A) = |AI - A| = |A - A| = 0$ と考えるのではなく、 n 次の多項式 $\Phi(x)$ に行列 A を代入すると考える。

(確認)

$\Phi(x)$ は固有多項式なので、 n 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を使って因数分解できる(付式14)。

$$\Phi(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) \quad \dots \text{(付式14)}$$

また、次のような、行列 A を三角化する行列 T を用意する(付録1.9)。対角成分は行列 A の固有値になる。

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{注}) \quad * \text{ は、どんな値でもいいことを示す。}$$

この変換行列 T を使って、 $T^{-1}\Phi(A)Tx$ を計算する。ここで、 x は任意のベクトルであるとする。

$$\begin{aligned} T^{-1}\Phi(A)Tx &= T^{-1}(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I)Tx = T^{-1}(A - \lambda_1 I)T T^{-1}(A - \lambda_2 I)T \dots T^{-1}(A - \lambda_n I)Tx \\ &= (T^{-1}AT - \lambda_1 I)(T^{-1}AT - \lambda_2 I) \dots (T^{-1}AT - \lambda_n I)x \\ &= \begin{bmatrix} 0 & & * \\ \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} - \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_{n-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

この式は、任意のベクトル x に関して成立するので、 $T^{-1}\Phi(A)T = 0$ となり、左から T を右から T^{-1} を掛けて $\Phi(A) = T0T^{-1} = 0$ (零行列)、つまり、(付式13)が成立することを確認できる。

(例)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき、 A^5 を求める。 **ケーリー・ハミルトンの定理は、べき乗の次数を下げる働きがあることを活用する。**

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1) - 2 = x^2 - x - 2 \quad \text{よって、} A^2 - A - 2I = 0 \quad \text{から、} A^2 = A + 2I \quad (2 \text{ 次を } 1 \text{ 次に置き換え可能})$$

$$\text{従って、} A^3 = AA^2 = A(A + 2I) = A^2 + 2A = (A + 2I) + 2A = 3A + 2I$$

$$\text{同様にして、} A^4 = 5A + 6I \quad \text{そして、} A^5 = 11A + 10I = 11 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 22 & 21 \end{bmatrix}$$

付録5. 可制御性の確認

■システムが可制御であれば、つまり、有限時間 t_f で初期状態 $x(0)$ から任意の状態 $x(t_f)$ へ移行させるような入力 $u(t)$ ($0 \leq t \leq t_f$) が存在すれば、可制御性行列がフルランクになること(必要条件)を確認する。

状態方程式 $d x(t) / dt = A x(t) + b u(t)$ を解くと

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad \text{なお、右辺第1項は自由応答(内部安定性)、第2項は入力応答(入出力安定性)を示す。}$$

よって、 $t = t_f$, $e^{At} = e^{-At_f}$ とおき、両辺に左から e^{-At_f} を掛けると、 $e^{-At_f} x(t_f) - x(0) = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} b u(\tau) d\tau \dots$ (付式15)

ここで、状態遷移行列指数をマクローリン展開(原点回りでの展開)をすると、

$$e^{-A\tau} = I + \{ (A(-\tau)) \} + \{ (A^2(-\tau)^2) / 2! \} + \{ (A^3(-\tau)^3) / 3! \} + \dots + \{ A^n(-\tau)^n \} (1/n!) + \dots \dots \dots \text{(付式16)}$$

また、ケーリー・ハミルトンの定理より、行列 A の固有多項式は 0 (零行列)になる(付式17)。

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0 \quad \dots \text{(付式17)}$$

つまり、行列 A^n は $A^{n-1}, \dots, A, A^0 (= I)$ の線形結合で表される。同様に、行列 A^{n+1}, A^{n+2}, \dots も $A^{n-1}, \dots, A, A^0 (= I)$ の線形結合で表されることが分かる。従って、状態遷移行列指数 $e^{-A\tau}$ は行列 A の $n-1$ 次多項式として、以下のように表される。

$$e^{-A\tau} = q_0(\tau) I + q_1(\tau) A + \dots + q_{n-1}(\tau) A^{n-1} \quad \dots \text{(付式18)}$$

従って、

$$e^{-At_f} x(t_f) - x(0) = \int_0^{t_f} \{ q_0(\tau) I + q_1(\tau) A + \dots + q_{n-1}(\tau) A^{n-1} \} b u(\tau) d\tau = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} q_0(\tau) \\ q_1(\tau) \\ \dots \\ q_{n-1}(\tau) \end{bmatrix} u(\tau) d\tau$$

このような入力 $u(t)$ が存在するためには、 $\text{rank} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] = n$ でなければならない。

\dots (付式19)

■システムの可制御性行列がフルランクであれば、システムは可制御であること(十分条件)を確認する。

下記の行列 $W_c(t)$ を用意する(可制御性グラム行列と呼ばれている)。

$$W_c(t) \equiv \int_0^t e^{-A\tau} b b^T e^{-A^T \tau} d\tau \quad \dots \text{(付式20)}$$

背理法を使用して、行列 $W_c(t)$ が正則であることが分かるので(説明略)、任意の初期状態 $x(0)$, 有限時間 t_f , 状態 $x(t_f)$ に対して、入力を

$$u(t) = -b^T e^{-A^T t} W_c^{-1}(t_f) \{ x(0) - e^{-At_f} x(t_f) \} \quad \dots \text{(付式21)}$$

と定めると、状態方程式の解の式にこの $u(t)$ を代入し、時間 t_f のときの状態を求める。

$$\begin{aligned} e^{At_f} x(0) + \int_0^t e^{A(t_f-\tau)} b u(\tau) d\tau &= e^{At_f} \{ x(0) + \int_0^t e^{-A\tau} b (-b^T e^{-A^T \tau}) d\tau W_c^{-1}(t_f) (x(0) - e^{-At_f} x(t_f)) \} \\ &= e^{At_f} \{ x(0) - W_c(t_f) W_c^{-1}(t_f) (x(0) - e^{-At_f} x(t_f)) \} = x(t_f) \quad \dots \text{(付式22)} \end{aligned}$$

よって、有限時間 t_f で、 $x(0)$ から $x(t_f)$ に移行させることができる。

付録6. 可観測性の確認

■システムの可観測性行列がフルランクであればシステムは可観測である。つまり、初期時間 0 から有限時間 t_f での入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ ($0 \leq t \leq t_f$) から初期状態 $x(0)$ を一意に定めることができること(十分条件)を確認する。

確認方法には対偶を使う。つまりシステムが可観測でないならば、可観測性行列はフルランクでないことを確認する。

(注)対偶: 命題「AならばBである」ことを示すには、「BでないならばAでない」ことを示せばいい。

観測方程式 $y(t) = C x(t)$ に、状態方程式 $dx(t) / dt = A x(t) + b u(t)$ の解を代入すると、

$$y(t) = C e^{At} x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad \dots \text{(付式23)}$$

可観測でないとするれば、例えば異なる2つの初期状態 $x_A(0), x_B(0)$ が求まる。つまり、

$$y(t) = C e^{At} x_A(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad \dots \text{(付式24)}$$

$$y(t) = C e^{At} x_B(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad \dots \text{(付式25)}$$

よって、 $C e^{At} \{ x_A(0) - x_B(0) \} = C e^{At} z = 0$ (ここでは、ベクトル $z = x_A(0) - x_B(0)$ とした)

この式は任意の時間で成立するので、 $C e^{At} z |_{t=0} = C z = 0$ のほか、

$$d(C e^{At} z) / dt |_{t=0} = C A e^{At} z |_{t=0} = C A z = 0, \quad d(C A e^{At} z) / dt |_{t=0} = C A^2 e^{At} z |_{t=0} = C A^2 z = 0, \dots$$

$$\text{つまり、} C z = C A z = C A^2 z = \dots = C A^{n-1} z = 0 \quad \dots \text{(付式26)}$$

従って、下式(左)が成り立つが、 $z \neq 0$ つまり、 $x_A(0)$ と $x_B(0)$ は異なると仮定しているので、下式(右)が導かれる。

$$\begin{bmatrix} C \\ C A \\ \dots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix} z = 0 \quad \dots \text{(付式27)} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \dots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix} < n \quad \dots \text{(付式28)}$$

以上から、システムが可観測でなければ、可観測性行列はフルランクでないことを確認できる。よって、十分条件を確認できた。

■システムが可観測であれば、可観測性行列がフルランクであること(必要条件)を確認する。同じく対偶を使用する。

つまり、可観測性行列がフルランクでなければ、システムは可観測でないことを示せばいい。

可観測性行列がフルランクでなければ、上記でベクトル $z \neq 0$ が成立する。つまり、初期状態が複数存在することになり、システムは可観測ではない。

付録7. 可制御正準形の導出(1/2)

状態方程式の係数行列 A をシステムの入出力関係を変えずに変換することによって、例えば対角正準形に変換することによって自由応答の形(モード)を知ることができた(付録2)。ここでは係数行列 A を、**状態フィードバック制御のゲインを求める際に使用することができる可制御正準形に変換する**(システムが可制御であることが前提)。

状態方程式 $\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t)$

可制御なので可制御性行列 $[b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]$ は正則である。つまり、ベクトルの組み $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ は独立である。よって、下記の n 個のベクトルの組み q_1, q_2, \dots, q_n も独立になる。ただし、 a_0, a_2, \dots, a_{n-1} はシステムの実特性多項式の係数である。

$$\begin{aligned} q_n &= b \\ q_{n-1} &= Aq_n + a_{n-1}q_n = Ab + a_{n-1}b, \quad q_{n-2} = Aq_{n-1} + a_{n-2}b = A(Ab + a_{n-1}b) + a_{n-2}b = A^2b + a_{n-1}Ab + a_{n-2}b \\ &\dots \\ q_2 &= Aq_3 + a_2b = A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \dots + a_3Ab + a_2b, \quad q_1 = Aq_2 + a_1b = A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \dots + a_2Ab + a_1b \end{aligned}$$

ここで、ベクトル q_1 に行列 A を左から掛けて、

$$Aq_1 = (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I) b - a_0b \quad \text{ただし、} I \text{ は単位行列}$$

ここで、ケーリー・ハミルトンの定理(付録4)を適用すれば、 $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0$

よって、 $T = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]$ とおけば、

$$Aq_1 = -a_0b = -a_0q_n = T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_0 \end{bmatrix} \quad \text{同様に、} Aq_2 = (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_2A + a_1I) b - a_1b = q_1 - a_1q_n = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_1 \end{bmatrix},$$

$$\dots, Aq_n = q_{n-1} - a_{n-1}q_n = T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{また、} b = q_n = T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ここで、} A_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (付式29)}$$

$$\text{とおけば、} AT = TA_t \quad \text{また、} b_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots \text{ (付式30)}$$

$$\text{とおけば、} b = Tb_t$$

従って、 $A_t = T^{-1}AT$ また、 $b_t = T^{-1}b$ となる。行列 A_t とベクトル b_t を行列 A とベクトル b の**可制御正準形**と呼ぶ。

付録7. 可制御正準形の導出(2/2) 変換行列

ここでは、可制御正準形を導出する際に使用する変換行列 T を求める。

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{b} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_{n-1} = \mathbf{Ab} + a_{n-1}\mathbf{b} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} + \cdots + a_2\mathbf{Ab} + a_1\mathbf{b} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって、

$$\mathbf{T} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & a_{n-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{McL} \quad \cdots \quad (\text{付式31})$$

ただし、 $\mathbf{Mc} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$ 、 $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & a_{n-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$ とおく。

付録8. 可制御正準形を使用した極配置の方法

可制御正準形を使用して状態フィードバックの極配置を行う方法を整理する(付録7を活用する)。

状態方程式: $d \mathbf{x}(t) / dt = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \mathbf{u}(t)$ 変換行列: $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T} \mathbf{x}(t)$

ここで、変換行列は、(付録7 2/2)に示す、行列 \mathbf{A} を可制御正準形に変換する行列である。つまり、 $\mathbf{T} = \mathbf{M}_c \mathbf{L}$
この可制御正準形を使用した状態フィードバックの方程式を下式に示す。

状態方程式: $d \mathbf{z}(t) / dt = (\mathbf{A}_t - \mathbf{b}_t \mathbf{f}_t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_t \mathbf{u}(t) \quad \dots$ (付式32)

ただし、行列 \mathbf{A}_t , ベクトル \mathbf{b}_t は、(付録7 1/2)に示す通りで、 $\mathbf{f}_t = [f_{t1} \ f_{t2} \ \dots \ f_{tn}]$ は状態フィードバックゲインである。

よって、この状態方程式の特性方程式は以下ようになる(式の展開には余因子行列を使う)。

$$|s \mathbf{I} - (\mathbf{A}_t - \mathbf{b}_t \mathbf{f}_t)| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & s & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & s & -1 \\ a_0 + f_{t1} & a_1 + f_{t2} & a_2 + f_{t3} & \cdot & a_{n-2} + f_{tn-1} & s + a_{n-1} + f_{tn} \end{vmatrix}$$

$$= \{(-1)^{n+n} (s + a_{n-1} + f_{tn}) s^{n-1}\} + \dots + \{(-1)^{n+2} (a_1 + f_{t2}) s (-1)^{n-2}\} + \{(-1)^{n+1} (a_0 + f_{t1}) (-1)^{n-1}\}$$

$$= s^n + (a_{n-1} + f_{tn}) s^{n-1} + \dots + (a_1 + f_{t2}) s + (a_0 + f_{t1}) = 0 \quad \dots$$
 (付式33)

一方、閉ループの望ましい極配置を行った特性方程式は、極を p_1, p_2, \dots, p_n と置けば、

$(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_0 = 0 \quad \dots$ (付式34)

(付式33)と(付式34)の s の多項式の係数を等しくすれば、望ましい極配置をするための状態フィードバックゲイン \mathbf{f}_t が求まる。

つまり、 $a_{n-1} + f_{tn} = d_{n-1}$ より $f_{tn} = d_{n-1} - a_{n-1}$ 以下同様にして、 $\mathbf{f}_t = [d_0 - a_0 \ d_1 - a_1 \ \dots \ d_{n-1} - a_{n-1}] \quad \dots$ (付式35)

(例) 「5. 状態フィードバックと極配置」で扱ったシステムにおいて、極配置を同じ値にしたときの状態フィードバックゲインを求める。

特性方程式は、 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda (\lambda - 3) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

よって、 $a_0 = 2, a_1 = -3$ なお、上式は、 $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ なので、このシステムは不安定である(固有値実部が正)。

一方、システムを安定にする望ましい安定極を -2 と -3 とおくと、 $(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ よって、 $d_0 = 6, d_1 = 5$

従って、可制御正準形での状態フィードバックゲインは、 $\mathbf{f}_t = [d_0 - a_0 \ d_1 - a_1] = [6 - 2 \ 5 - (-3)] = [4 \ 8]$

よって、もとのシステムの状態フィードバックゲイン \mathbf{f} は以下の通り。「5. 状態フィードバックと極配置」の例と同じ結果になる。

$$\mathbf{f} = [f1 \ f2] = \mathbf{f}_t \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{f}_t (\mathbf{M}_c \mathbf{L})^{-1} = [f_{t1} \ f_{t2}] \{ [\mathbf{b} \ \mathbf{Ab}] \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \}^{-1} = [4 \ 8] \{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \}^{-1} = [4 \ 8] (1/4) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [2 \ 4]$$

付録9. アッカーマン(Ackerman)法による極配置

アッカーマンの方法では、状態ベクトルフィードバックゲインが次式で与えられることを利用する。

$$f = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] M_c^{-1} (A^n + d_{n-1} A^{n-1} + \dots + d_1 A + d_0 I) \quad \dots \text{(付式36)}$$

以下、この行列 f が望ましい極を設定したときの状態フィードバックゲインになっていることを確認する。

$$\begin{aligned} f_t = f T &= [0 \ \dots \ 0 \ 1] M_c^{-1} (A^n + d_{n-1} A^{n-1} + \dots + d_1 A + d_0 I) T = [0 \ \dots \ 0 \ 1] M_c^{-1} T T^{-1} (A^n + d_{n-1} A^{n-1} + \dots + d_1 A + d_0 I) T \\ &= [0 \ \dots \ 0 \ 1] L (A_t^n + d_{n-1} A_t^{n-1} + \dots + d_1 A_t + d_0 I) \end{aligned}$$

なお、ここでは、 $T = M_c L$ つまり、 $L = M_c^{-1} T$ 、および $A_t = T^{-1} A T$ の関係を使用した。

また、 $[0 \ \dots \ 0 \ 1] L = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ が成立し、

ケーリー・ハミルトンの定理(付録4)より、 $A_t^n + a_{n-1} A_t^{n-1} + \dots + a_1 A_t + a_0 I = 0$ が成り立つことから、

$$f_t = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \{ (d_{n-1} - a_{n-1}) A_t^{n-1} + \dots + (d_1 - a_1) A_t + (d_0 - a_0) I \} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] (f_{t_n} A_t^{n-1} + \dots + f_2 A_t + f_1 I) \quad \dots \text{(付式37)}$$

ここで、 $[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] I = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ 、 $[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] A_t = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ 、 $[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] A_t^2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$ 、 \dots 、 $[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] A_t^{n-1} = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$ の関係を使うと、

(付式36)で f を設定したとき、(付式37)より、確かに、 $f_t = [f_{t_1} \ f_{t_2} \ \dots \ f_{t_n}]$ が成り立っていることが分かる。

アッカーマンの方法は他の方法と異なり、多項式の係数比較の方程式を解いたり、変換行列を求めたりする必要がないことに特徴があり、極配置を行うにあたって使いやすい方法であると言える。

(例) 「5. 状態フィードバックと極配置」で扱ったシステムにおいて、極配置を同じ値にしたときの状態フィードバックゲインを求める。

システムを安定にする望ましい安定極を -2 と -3 とおくと、 $(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ よって、 $d_0 = 6$ 、 $d_1 = 5$ よって、システムの状態フィードバックゲイン f は、(付式36)を使って、以下の式から求まる。

結果は、「5. 状態フィードバックと極配置」の例と「付録8. 可制御正準形を使用した極配置の方法」の例と同じになる。

$$\begin{aligned} f &= [f_1 \ f_2] = [0 \ 1] [b \ Ab]^{-1} (A^2 + d_1 A + d_0 I) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^2 + 5 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= [0 \ 1] (-1/4) \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -16 & 28 \end{bmatrix} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} -14 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = [2 \ 4] \end{aligned}$$

付録10. リカッチ方程式 (Riccati equation) の導出

■方程式の導出

最適な制御則 $u(t) = K x(t)$ (K は最適なフィードバックゲイン) が求められたとして、評価関数(式22)に代入すると、

$$J(x, t) = \int_t^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt = \int_t^{\infty} \{ x^T Q x + (K x)^T R (K x) \} dt = \int_t^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt = \int_t^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt > 0$$

これを時間 t で微分すると、 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ であるので、 $d/dt \{ J(x, t) \} = -x^T (Q + K^T R K) x < 0$

ここで、 $J > 0$ (正定)、 $dJ/dt < 0$ (負定) であるので、リアプノフ関数 $J = x^T P x$ (付録3) を満足する行列 P が存在し、システムは漸近安定になる(付録3)。

まず、 J を時間微分して、 $dx/dt = A x + B u = A x + B K x = (A + B K) x$ を代入する。

$$dJ/dt = d/dt (x^T) P x + x^T P dx/dt = x^T (A + B K)^T P x + x^T P (A + B K) x = x^T \{ (A + B K)^T P + P (A + B K) \} x$$

従って、 $x^T \{ (A + B K)^T P + P (A + B K) \} x = -x^T (Q + K^T R K) x$ より、 $(A + B K)^T P + P (A + B K) = -Q - K^T R K$ が成り立つ。

ここで、 J を最小にする、言い換えれば行列 P を最小にする K を K で偏微分することによって求める。なお、 $\partial P / \partial K = 0$, $\partial K / \partial K = I$
 $\partial \{ (A + B K)^T P + P (A + B K) \} / \partial K = \partial (-Q - K^T R K) / \partial K$

$$\{ \partial (A + B K)^T / \partial K \} P + (A + B K)^T (\partial P / \partial K) + (\partial P / \partial K) (A + B K) + P \{ \partial (A + B K) / \partial K \} = -(\partial K^T / \partial K) R K - K^T R (\partial K / \partial K)$$

よって、 $B^T P + P B = -R K - K^T R$ 従って、 $P B = -K^T R$ ここで、 $P = P^T, R = R^T$ なので、最適ゲインは $K = -R^{-1} B^T P$

また、 $(A + B K)^T P + P (A + B K) = -Q - K^T R K$ つまり、 $A^T P + K^T B^T P + P A + P B K = -Q - K^T R K$ に

$$K = -R^{-1} B^T P, K^T = -P B R^{-1} \text{ を代入すると、} A^T P - P B R^{-1} B^T P + P A - P B R^{-1} B^T P = -Q - (-P B R^{-1}) R (-R^{-1} B^T P)$$

この式を整理すると、 $P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$ となり、リカッチ方程式が得られる。

■制御則が「安定」であることの再確認

$P B R^{-1} B^T P = P B (R^{-1} B^T P) + (P B R^{-1}) B^T P - (P B R^{-1}) R (R^{-1} B^T P)$ (第2項 + 第3項 = 0) に $R^{-1} B^T P = -K, P B R^{-1} = -K^T$ を代入

$$P B R^{-1} B^T P = -P B K - K^T B^T P - K^T R K \text{ これをリカッチ方程式に代入すると、} P A + A^T P + P B K + K^T B^T P + K^T R K + Q = 0$$

この式から、 $P (A + B K) + (A + B K)^T P = -(K^T R K + Q) < 0$ この式はリアプノフ方程式、よって閉ループ系 $A + B K$ は安定である。

■制御則が「最適」であることの再確認

$\eta = u + R^{-1} B^T P x$ とおいたとき $\eta = 0$ になることで、 $u = -R^{-1} B^T P x$ が最適解であることを確認する。

$$\eta^T R \eta = (u + R^{-1} B^T P x)^T R (u + R^{-1} B^T P x) = u^T R u + x^T P B R^{-1} R u + u^T R R^{-1} B^T P x + x^T P B R^{-1} R R^{-1} B^T P x \\ = u^T R u + x^T P B u + u^T B^T P x + x^T P B R^{-1} B^T P x$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt = \int_0^{\infty} \{ x^T (P B R^{-1} B^T P - P A - A^T P) x + u^T R u \} dt$$

$$= \int_0^{\infty} (x^T P B R^{-1} B^T P x - x^T P A x - x^T A^T P x + u^T R u) dt = \int_0^{\infty} (\eta^T R \eta - x^T P B u - u^T B^T P x - x^T P A x - x^T A^T P x) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \{ \eta^T R \eta - x^T P (A x + B u) - (A x + B u)^T P x \} dt = \int_0^{\infty} \{ \eta^T R \eta - x^T P (dx/dt) - (dx^T/dt) P x \} dt = \int_0^{\infty} \{ \eta^T R \eta - d(x^T P x)/dt \} dt$$

ここで、システムは漸近安定であるので、 $x(\infty) = 0$ よって、 $J = \int_0^{\infty} \eta^T R \eta dt + x(0)^T P x(0)$ ここで、 $x(0)^T P x(0)$ は制御できない。

よって、評価関数 J を最小にするためには、 $\eta^T R \eta = 0$ つまり、 $\eta = 0$ でなくてはならない。 $u = -R^{-1} B^T P x$ が最適操作量になる。

付録11. 有本・ポッター法(1/2)

有本・ポッター法は、ハミルトン行列というブロック行列からなる行列の固有値を求めることで、リカッチ方程式を解かずして状態フィードバックの最適レギュレータのゲインを求める方法である。

ハミルトン行列 $H = \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \dots$ (付式38)

1) ハミルトン行列は、虚軸に対して対称な固有値をペアで持つことを確認する。

$L = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ (I_n は $n \times n$ の単位行列) とおく。ここで、行列 $(L H L^{-1})^T$ を求める。

$$(L H L^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -Q & -A^T \\ -A & B R^{-1} B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T & Q \\ B R^{-1} B^T & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & B R^{-1} B^T \\ Q & A^T \end{bmatrix} = -H$$

よって、 $|\lambda I - H| = |L| |\lambda I - H| |L^{-1}| = |\lambda I - L H L^{-1}| = |\lambda I - (L H L^{-1})^T| = |\lambda I + H|$ (行列の固有値は転置しても不変)
このことから、ハミルトン行列 H の固有値が λ であるとき、 $-\lambda$ も固有値であることが分かる(虚軸に対称な固有値を持つ)。

2) ハミルトン行列の固有値が、最適制御を実現する状態フィードバック系の固有値に等しいことを確認する。

ハミルトン行列の、虚軸対称の固有値行列を Λ (λ の大文字) とし、それに対応した固有ベクトルを V_1, V_2 とする。

固有方程式は、 $\begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Lambda$ よって、
 $\begin{cases} A V_1 - B R^{-1} B^T V_2 = V_1 \Lambda \dots \text{(付式39)} \\ -Q V_1 - A^T V_2 = V_2 \Lambda \dots \text{(付式40)} \end{cases}$

ここで、新しい行列 $P = V_2 V_1^{-1} \dots$ (付式41) を導入し、
(付式39)の左から $V_2 V_1^{-1}$ を、右から V_1^{-1} を掛ける。

$V_2 V_1^{-1} A V_1 V_1^{-1} - V_2 V_1^{-1} B R^{-1} B^T V_2 V_1^{-1} = V_2 V_1^{-1} V_1 \Lambda V_1^{-1}$ つまり、 $P A - P B R^{-1} B^T P = V_2 \Lambda V_1^{-1} \dots$ (付式42)

また、(付式40)の右から V_1^{-1} を掛けると、

$-Q V_1 V_1^{-1} - A^T V_2 V_1^{-1} = V_2 \Lambda V_1^{-1}$ つまり、 $-Q - A^T P = V_2 \Lambda V_1^{-1} \dots$ (付式43)

(付式42)と(付式43)から、 $P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$ となり、行列 P はリカッチ方程式を満足する解であることが分かる。

一方、(付式39)の右から V_1^{-1} を掛けると、 $A V_1 V_1^{-1} - B R^{-1} B^T V_2 V_1^{-1} = V_1 \Lambda V_1^{-1}$ つまり、
 $A - B R^{-1} B^T P = V_1 \Lambda V_1^{-1}$ よって、 $(A - B R^{-1} B^T P) V_1 = V_1 \Lambda$ となり、これは行列 $A - B R^{-1} B^T P$ が固有値 Λ を持つことを示す。
つまり、状態フィードバックの係数行列 $A - B R^{-1} B^T P$ の固有値はハミルトン行列の固有値 Λ と等しいことが分かる。

合わせて、最適フィードバックゲインが $-R^{-1} B^T P$ であることが分かる。

付録11. 有本・ポッター法(2/2)

ここでは、「6. 最適レギュレータ」と同じ例で、有本・ポッター法で最適ゲインを求める。

(例)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \text{ (対称行列)} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad R = 1 \quad \text{のとき、}$$

ここで、 $-B R^{-1} B^T = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ よって、ハミルトン行列 H は、 $H = \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ \hline -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

行列 H の固有値を求める。
 特性方程式は、 $|\lambda I - H| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 6 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$

$$= \lambda \{ (\lambda + 1) \lambda (\lambda - 1) - 6 \lambda + (\lambda + 1) \} + \{ \lambda (\lambda - 1) + 3 + 1 \}$$

$$= \lambda^4 - 5 \lambda^2 + 4 = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 4) = 0$$

よって、固有値は、 $\lambda = \pm 1, \pm 2$ である(虚軸に対して対称な固有値のペアになっている)。このうち、安定な固有値は実部が負であることから、最適制御の極配置は、 -1 と -2 となる。

これらの安定な極を使用して、最適なフィードバックゲイン $K_p = [k_{p1} \quad k_{p2}]$ を求める。

$$A + B K_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_{p1} \quad k_{p2}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + k_{p1} & -1 + k_{p2} \end{bmatrix} \quad \text{であるので、}$$

閉ループの特性方程式は、 $|\lambda I - (A + B K_p)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 - k_{p1} & \lambda + 1 - k_{p2} \end{vmatrix} = \lambda (\lambda + 1 - k_{p2}) + 1 - k_{p1} = \lambda^2 + (1 - k_{p2}) \lambda + (1 - k_{p1}) = 0$

一方、 -1 と -2 の極配置の最適制御の特性方程式は、 $(\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3 \lambda + 2 = 0$

これら2つの特性方程式の係数を比較して、

$$1 - k_{p1} = 2 \text{ より } k_{p1} = -1$$

$$1 - k_{p2} = 3 \text{ より } k_{p2} = -2$$

よって、最適ゲインは、 $k_p = [-1 \quad -2]$ である。

このように、有本・ポッター法を使用すると、リカッチ方程式を解かなくても(行列 P を求めなくても)、最適ゲインを求めることができる。

付録12. カルマンフィルターの構成要素の導出

■カルマンゲインの導出

推定誤差 = 実際の状態量 $x(k)$ - 推定した状態量 $x_e(k)$ を最小にするカルマンゲインを求める。推定誤差の大きさは推定誤差の2乗平均(共分散)で表されるが、この推定誤差の分散共分散行列 $P(k)$ は誤差の間に相関がないため分散を対角要素に持つ対角行列になる(付録1. 19))。よって、推定誤差の大きさは 行列 $P(k)$ 対角要素の総和 $\text{tr } P(k)$ だと考えることができる。

状態方程式: $x(k) = A x(k-1) + B u(k-1) + w(k)$

観測方程式: $y(k) = C x(k) + v(k)$

事前状態推定量 (a priori estimate): $x_p(k) = A x_e(k-1) + B u(k-1)$

事後状態推定量 (a posteriori estimate): $x_e(k) = x_p(k) + L(k) (C x_p(k) - y(k)) = (I + L(k) C) x_p(k) - L(k) y(k)$

(参考) 行列対角和(トレース)の偏微分の公式
 $\partial \{ \text{tr} (XA) \} / \partial X = A^T$, $\partial \{ \text{tr} (XAX^T) \} / \partial X = X(A + A^T) = 2 X A$

1) 観察量の誤差の共分散: $S(k)$ (注) E は期待値を表す。{...} は、直前の {} の中と同じであることを表す。

$P_p(k) = E [(x_p(k) - x(k)) (x_p(k) - x(k))^T]$ (これは $x_p(k) - x(k)$ の共分散) そして、 $V = E [v(k) v(k)^T]$ と置く。

また、状態量 $x(k)$, $x_p(k)$ とノイズ $v(k)$ の間に相関はない。 $E [C (x(k) - x_p(k)) v^T(k)] = 0$, $E [C (x(k) - x_p(k))^T v(k)] = 0$ であるので、

$S(k) = E [(y(k) - C x_p(k)) (y(k) - C x_p(k))^T] = E [\{ (C x(k) + v(k)) - C x_p(k) \} \{ \dots \}^T] = E [\{ C (x(k) - x_p(k)) + v(k) \} \{ \dots \}^T]$
 $= E [\{ C (x(k) - x_p(k)) (x(k) - x_p(k))^T C^T + v(k) v(k)^T \}] = C P_p(k) C^T + V \dots$ (付式44)

2) カルマンゲイン: $L(k)$

$P(k) = E [(x_e(k) - x(k)) (x_e(k) - x(k))^T] = E [\{ (I + L(k) C) x_p(k) - L(k) y(k) - x(k) \} \{ \dots \}^T]$
 $= E [\{ (I + L(k) C) x_p(k) - L(k) (C x(k) + v(k)) - x(k) \} \{ \dots \}^T] = E [\{ (I + L(k) C) (x_p(k) - x(k)) - L(k) v(k) \} \{ \dots \}^T]$

ここで、状態量 $x(k)$, $x_p(k)$ とノイズ $v(k)$ の間の相関はないので、下式が成立する。

$E [\{ (I + L(k) C) (x_p(k) - x(k)) \} (L(k) v(k))^T] = 0$, $E [\{ (I + L(k) C) (x_p(k) - x(k)) \}^T (L(k) v(k))] = 0$

よって、 $P(k) = (I + L(k) C) P_p(k) (I + L(k) C)^T + L(k) V L(k)^T$

この行列 $P(k)$ の対角和である $\text{tr } P(k)$ を最小化する $L(k)$ がカルマンフィルターゲインになる。

そこで、 $\partial \text{tr } P(k) / \partial L(k) = 0$ を解いて $L(k)$ を求める。 $P_p(k)$ は対称行列なので $P_p(k) = P_p(k)^T$ また、定義より $V = V^T$ である。

ここで、(参考)トレースの偏微分の公式を使用して、

$\partial \text{tr } P(k) / \partial L(k) = (I + L(k) C) (P_p(k) + P_p(k)^T) C^T + L(k) (V + V^T) = 2 (I + L(k) C) P_p(k) C^T + 2 L(k) V = 0$

$L(k) (C P_p(k) C^T + V) = - P_p(k) C^T$ よって、カルマンゲインは、 $L(k) = - P_p(k) C^T (C P_p(k) C^T + V)^{-1} = - P_p(k) C^T S(k)^{-1} \dots$ (付式45)

3) 事前状態推定量の誤差の共分散: $P_p(k)$

$P_p(k) = E [(x_p(k) - x(k)) (x_p(k) - x(k))^T] = E [\{ (A x_e(k-1) + B u(k-1)) - (A x(k-1) + B u(k-1) + w(k)) \} \{ \dots \}^T]$
 $= E [\{ A (x_e(k-1) - x(k-1)) - w(k) \} \{ \dots \}^T] = E [\{ A (x_e(k-1) - x(k-1)) \} \{ \dots \}^T A^T] + E [w(k) w(k)^T]$
 $= A P(k-1) A^T + W \dots$ (付式46) ただし、 $W = E [w(k) w(k)^T]$

4) 事後状態推定量の誤差の共分散: $P(k)$

$P(k) = (I + L(k) C) P_p(k) (I + L(k) C)^T + L(k) V L(k)^T = (P_p(k) + L(k) C P_p(k)) (I + C^T L(k)^T) + L(k) (S(k) - C P_p(k) C^T) L(k)^T$
 $= P_p(k) + L(k) C P_p(k) + P_p(k) C^T L(k)^T + L(k) C P_p(k) C^T L(k)^T + L(k) S(k) L(k)^T - L(k) C P_p(k) C^T L(k)^T$
 $= P_p(k) + L(k) C P_p(k) + P_p(k) C^T L(k)^T + L(k) S(k) L(k)^T = P_p(k) + L(k) C P_p(k) + P_p(k) C^T L(k)^T + (- P_p(k) C^T) L(k)^T$
 $= (I + L(k) C) P_p(k) \dots$ (付式47)

付録13. 古典制御理論と現代制御理論の比較

(付表1) 制御理論の比較

	古典制御理論	現代制御理論
理論構築の時代	～ 1960 年代	1960 ～ 1980 年代
対象システム	限定的 (線形・時不変システム)	幅広い (線形・非線形、時不変・時変システム)
対象システムのモデル化方法	伝達関数	状態方程式
対象システムの入出力数	1入力1出力	多入力多出力
対象システムの解析領域	周波数領域	時間領域
適用する数学手法	ラプラス変換、フーリエ変換	線形代数、最適理論
制御系の主な設計ツール	PID フィードバック制御 ボード線図	状態フィードバック制御 最適レギュレータ
主な計算手段	主に解析解を使用	解析解に加えて数値解も使用
適用対象と強み	現代制御に比べて適用範囲は限定されるが、 周波数解析と安定余裕の考え方 が有効な機械システムの振動抑制制御などで力を発揮する。また、しっかりした数式モデルを構築できないものの、満足レベルの制御システムを構築したいというような場合には、フィードバック制御の考え方を実現した PID制御 を活用できる。	古典制御に比べて適用対象は広く、ロボット制御、移動体制御など 数式モデルを精度よく構築できるシステム によく使用されている。なかでも、 最適制御 は強力な制御手法である。また、数式モデルの構築が難しいような場合、数式モデルの不確かさを許容する新しい制御方法(ロバスト制御)が提唱されている。

ルドルフ・カルマン(ハンガリー系アメリカ人、1930年～2016年)は、1960年、モスクワで開かれた第1回国際自動制御連合会の学会で、状態方程式を用いたシステムの表現法、そして可制御、可観測の概念に加えて、最適制御問題の解法などを発表した。カルマンが現代制御の礎を築いたと言える。カルマンは「現代制御の父」と言われる。

また、カルマンが提唱したカルマンフィルターは、1960年代のアポロ宇宙計画(米国)で人工衛星の軌道計算に使用されて、計画の成功に大きな貢献を果たしたことで有名である。カルマンフィルターは、現代でも車載GPSの位置補正計算などに使用されている。

また、現代制御が広く使用されるようになった背景には、コンピュータの活用がある。数式を解析的に解くことが難しいような場合であっても、コンピュータを使用して解析解の代わりに数値解を求めることができるようになった。

参考にした書籍とURL

佐藤和也、下本陽一、熊澤典良：「はじめての現代制御理論」、講談社

こんとろラボ：機械制御技術者による技術解説ブログ、[制御工学超入門！制御工学とはどんな学問？ \(controlabo.com\)](http://controlabo.com)

植村充典(立命館大学)：「制御工学」、[制御工学2 1週目 制御工学の意義と歴史、状態空間モデル - YouTube](#)

AKITO(東京大学)：「線形代数」、[【線形代数#76】ケーリー・ハミルトンの定理 - Bing video](#)

浅井徹(名古屋大学)：「リアプノフ安定定理」、[制御工学第2 08 - YouTube](#)

土屋武司(東京大学)：「可制御、可観測」、[航空機の運動方程式 \(u-tokyo.ac.jp\)](http://u-tokyo.ac.jp)

小林康秀(長岡技術科学大学)：「アッカーマン法」、[index.php \(nagaokaut.ac.jp\)](http://index.php(nagaokaut.ac.jp))

足立修一、丸田一郎：「カルマンフィルターの基礎」、東京電機大学出版局

The MathWorks, Inc：「カルマンフィルター」、[【カルマンフィルター入門】Part 4: 最適な状態推定器のアルゴリズム - YouTube](#)

南祐樹(大阪大学)：「最適レギュレータ」、[【Vol.22】制御系設計論 第8回 その1 - YouTube](#)

師玉康成(信州大学)：「最適レギュレータ」、[リカッチの方法 \(Riccati equation\) \(wakasato.jp\)](http://rikacchi(wakasato.jp))

川谷亮治(福井大学)：「最適レギュレータ」、[D:MODERNCHAP5CHAP5.PDF \(u-fukui.ac.jp\)](http://D:MODERNCHAP5CHAP5.PDF(u-fukui.ac.jp))