

制御工学(古典制御)の基礎知識

2021年 ver. 1.0
倉谷 隆博

1. 動的システムと伝達関数

(注) 虚数を表すとき、数学では i を使用するが、工学の分野では電流を表す i との使い分けが紛らわしいので i の代わりに j が使用される。この資料では、虚数表現は j で統一した。

制御対象が静的であるとは制御対象の出力が同時刻の入力のみで決まる場合を言うが、制御対象の多くは動的である。**動的システムとは、制御対象の出力が同時刻の入力だけでなく過去の入力の影響を受けることを言う。動的システムは微分方程式で記述できる。**

■**ラプラス変換** (基本的な関数の変換と逆ラプラス変換は付録)
古典制御理論では、微分方程式の取り扱いを容易にするために、ラプラス変換 (記号 \mathcal{L}) を導入する。**時間領域の微分方程式が複素領域 (周波数領域) の代数方程式に変換される。**つまり、(図1)に示すように、時間領域では入力と制御対象の畳み込み積分 (後述) という複雑な計算式で表される出力が、ラプラス変換した複素領域では入力と制御対象の積で表される。ここで、制御対象をラプラス変換した関数は入出力関係に着目して**伝達関数**と呼ばれる。ラプラス変換の定義式を (式1) に示す。

$$F(s) = \mathcal{L} [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \dots (式1)$$

ここで、 $s = \sigma + j\omega$ (複素数) であり、 $\sigma > 0$ のとき、 $e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t}$ は $e^{-\sigma t}$ (減衰項) と $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$ (振動項) で構成される。例えば、 $f(t) = 1$, $\sigma = 1$, $\omega = 1$ のときの $f(t) e^{-st}$ の挙動を時間領域 (図2) と複素数領域 (図3) で示す。減衰の様子が分かる。

■畳み込み積分と伝達関数

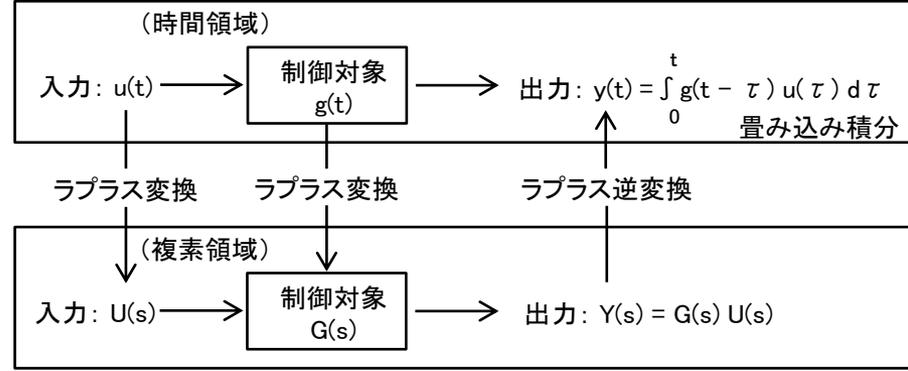
関数の畳み込み積分は、記号 $*$ を使用して (式2) で定義される。

$$(u * g) (t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad \dots (式2)$$

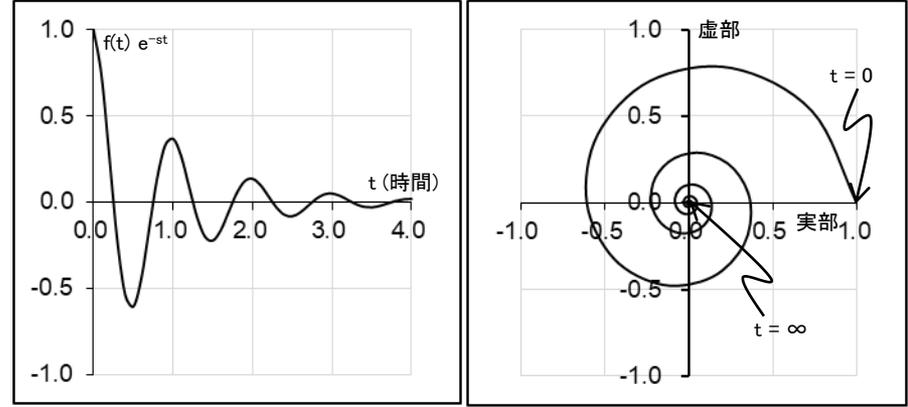
(図4) に畳み込み積分の考え方を示す。過去時刻 τ の関数 $u(\tau)$ の値が $t - \tau$ 時間後に関数 $g(t - \tau)$ の重みで現在時刻 t にその減衰した影響を残していると考える。**現在時刻 t でのこのような過去の影響の総和を考えるのが畳み込み積分 (Convolution Integral) である。** $u(t)$ を制御対象への入力、 $g(t)$ を制御対象を表す関数 (伝達関数に対応) だとすれば、(式2) は出力を表していることになる。この畳み込み積分のラプラス変換は (式3) になる。

$$Y(s) = \mathcal{L} [(u * g) (t)] = U(s) G(s) = G(s) U(s) \quad \dots (式3)$$

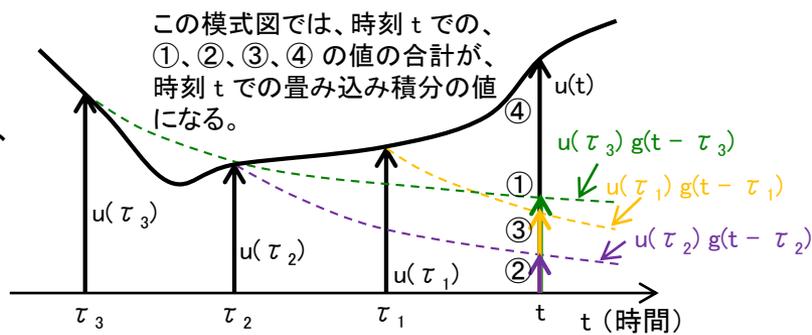
出力 $Y(s)$ が入力 $U(s)$ と伝達関数 $G(s)$ の積で表される。ここで、入力が架空のインパルス信号 $\delta(t)$ ($t = 0$ で ∞ , $t \neq 0$ で 0) だとすると、 $U(s) = \mathcal{L} [\delta(t)] = 1$ なので、 $Y(s) = G(s)$ となる。出力は伝達関数になる



(図1)ラプラス変換



(図2) $f(t) e^{-st}$ の時間推移 (時間領域) (図3) $f(t) e^{-st}$ の時間推移 (複素領域)



(図4)畳み込み積分の考え方

2. 動的システムの応答と安定性

システムへの入力が有界(上限値を持つ)で、システムの入出力も有界である場合(BIBO: Bounded-Input Bounded-Output という)、このシステムは安定であるという。ここでは、動的システムの安定性について整理しておく。

動的システムでは、入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ の関係は一般に(式4)の微分方程式で表される。

$$d^n y(t)/dt^n + a_{n-1} d^{n-1} y(t)/dt^{n-1} + \dots + a_1 dy(t)/dt + a_0 y(t) = b_m d^m u(t)/dt^m + \dots + b_1 du(t)/dt + b_0 u(t) \quad \text{但し、} n \geq m \quad \dots \text{(式4)}$$

両辺をラプラス変換して伝達関数を求める。

$$G(s) = Y(s) / U(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) / (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) \quad \dots \text{(式5)}$$

この制御対象(伝達関数)の安定性を確認するために、ステップ入力 $u(t) = 0 (t < 0), u(t) = 1 (t \geq 0)$ を加えた場合を考える。ラプラス変換表(付録)に示すように、 $u(t)$ のラプラス変換は、 $\mathcal{L}[u(t)] = 1/s$ であり、ステップ応答は(式6)になる。

$$Y(s) = G(s) U(s) = G(s) / s = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) / \{s(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)\} \quad \dots \text{(式6)}$$

(式6)の分母を、分母 = 0 (特性多項式という)の根を使って因数分解する。つまり、特性多項式の実数の根 $0, \alpha_i (i = 1, \dots, q)$ と共役複素数の根 $\beta_k \pm j \omega_k (k = 1, \dots, r)$ を使って因数分解する。これによって、(式6)は部分分数の(式7)に置き換えることができる。

$$Y(s) = G(s) / s = C / s + \sum_{i=1}^q D_i / (s - \alpha_i) + \sum_{k=1}^r [G_k \omega_k / \{(s - \beta_k)^2 + \omega_k^2\} + H_k (s - \beta_k) / \{(s - \beta_k)^2 + \omega_k^2\}] \quad \dots \text{(式7)}$$

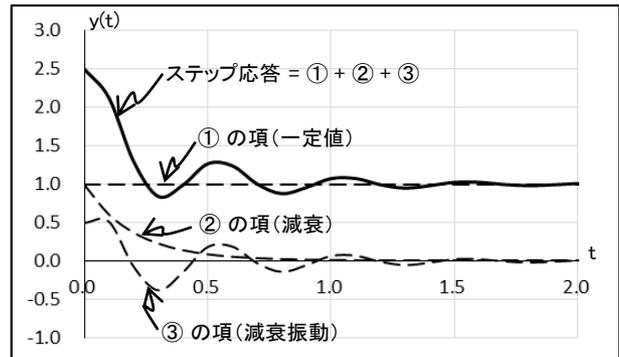
但し、 C, D_i, G_k, H_k は定数

この式を、逆ラプラス変換して時間領域の関係に戻すと、ステップ応答が得られる(付録のラプラス変換表を参照)。

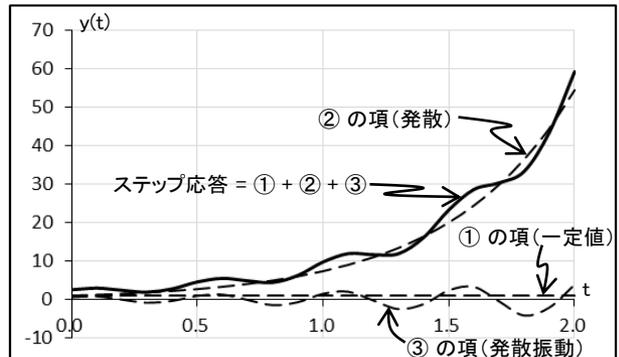
$$y(t) = \underbrace{C}_{\text{①}} + \underbrace{\sum_{i=1}^q D_i e^{\alpha_i t}}_{\text{②}} + \underbrace{\sum_{k=1}^r e^{\beta_k t} (G_k \sin \omega_k t + H_k \cos \omega_k t)}_{\text{③}} \quad \dots \text{(式8)}$$

(式8)の②の $e^{\alpha_i t}$ と③の $e^{\beta_k t}$ の項がステップ応答 $y(t)$ の収束(安定性)を左右する。つまり全ての $\alpha_i < 0$ かつ全ての $\beta_k < 0$ のときに限り、(式8)は収束し安定である。つまり、**制御対象(伝達関数)の全ての極の実部が負のときに限りステップ応答は安定になる。**

(図5)は α, β とも負の値の時のステップ応答(安定)であり、(図6)は、 α, β とも正の値の時のステップ応答(不安定、発散)である。



(図5) 安定なステップ応答の例



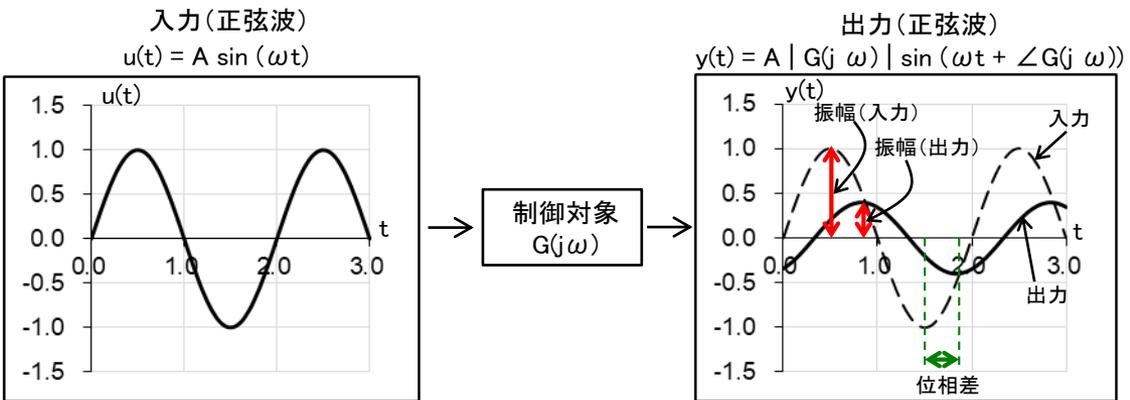
(図6) 不安定なステップ応答の例

(図5)と(図6)のステップ応答は、(式8)のパラメータを以下のように設定したときのものである。

- $C = 1, q = 1, r = 1, D_1 = 1, G_1 = 1, H_1 = 1, \omega_1 = 4\pi$ と設定した。
- (図5)では $\alpha_1 = -5, \beta_1 = -2$ といずれも負の値を設定した。
- (図6)では $\alpha_1 = 2, \beta_1 = 2$ といずれも正の値を設定した。

3. ベクトル軌跡とボード線図(周波数応答)

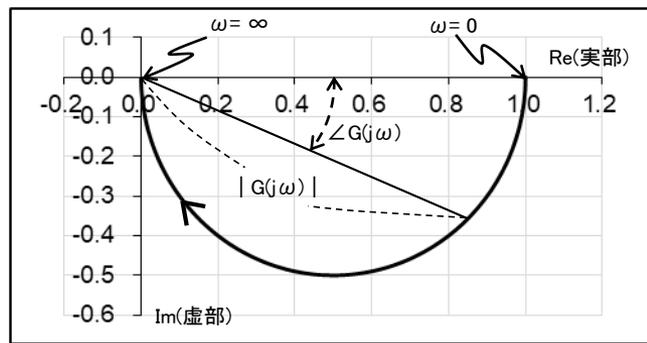
周波数応答法は、制御対象の特徴を把握する方法である。(図7)に示すように、制御対象に正弦波を入力すると、出力は入力の正弦波と同じ角周波数を持つ正弦波になる(付録4)。但し、出力の振幅と位相差は角周波数の影響を受け、出力の振幅は $|G(j\omega)|$ 倍に、位相差は偏角 $\angle G(j\omega)$ になる。なお、(付録4)に示すように伝達関数 $G(s)$ は周波数伝達関数 $G(j\omega)$ に置き換えることができる。制御対象を周波数伝達関数 $G(j\omega)$ を使って解析する。図を使ってその特徴を把握することができるようになる(ベクトル軌跡とボード線図)。



(図7) 周波数応答

■ベクトル軌跡

周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は複素数であり、角周波数 ω (ラジアン/秒) の変化に沿って $G(j\omega)$ の変化、つまり、ゲイン $|G(j\omega)|$ と偏角 $\angle G(j\omega)$ の変化の様子を同時に複素平面上にベクトルの軌跡として表すことができる。(図8)は、 s の1次式を分母に持つ伝達関数(1次遅れ系)のベクトル軌跡である(角周波数を0から ∞ まで変化させる)。後述するナイキスト線図に利用される。



(図8) 1次遅れ系のベクトル軌跡

(例1) 1次遅れ系: $G(s) = K / (Ts + 1)$ の場合 (K, T は定数)

$$G(j\omega) = K / (Tj\omega + 1) = K / (1 + T^2\omega^2) - j \{ K T \omega / (1 + T^2\omega^2) \}$$

実部 = $K / (1 + T^2\omega^2)$, 虚部 = $-K T \omega / (1 + T^2\omega^2)$ なお、 $K = 1, T = 1$ とした。

■ボード線図

ボード線図は正弦波入力の角周波数 ω (ラジアン/秒) に対する応答の、ゲインと位相差をそれぞれに表したものである。

ゲイン = $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ 単位は、dB (デシベル), 位相差 = $\angle G(j\omega)$ 単位は、 $^\circ$ (度)

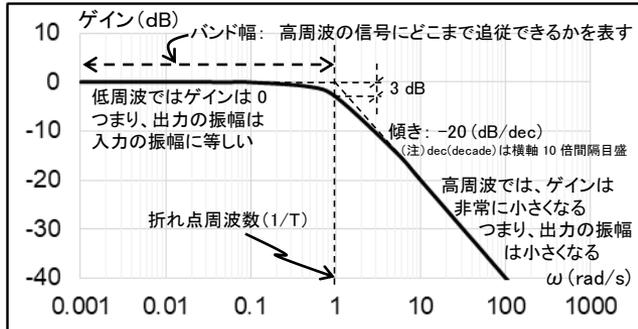
ボード線図は制御系とか信号フィルターの解析、設計、改善などに使用される。

(例2) (例1)と同じ1次遅れ系

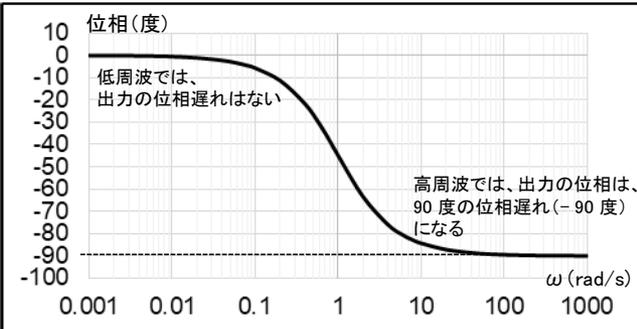
$$\text{ゲイン} = 20 \log_{10} \sqrt{(\text{実部})^2 + (\text{虚部})^2} = K / \sqrt{1 + T^2\omega^2}$$

$$\text{位相差} = \tan^{-1} (\text{虚部} / \text{実部}) = -\tan^{-1} (T\omega)$$

この例でも、 $K = 1, T = 1$ とした。



(図9) 1次遅れのボード線図(ゲイン線図)



(図10) 1次遅れのボード線図(位相線図)

4. 閉ループ系の安定性(ナイキストの安定判別法)

(図11)に示す閉ループ系の入力 $r(t)$ から出力 $y(t)$ への伝達関数を $Gyr(s)$ とすると、

$$Gyr(s) = L(s) / (1 + L(s)) \quad \dots(式9)$$



(図11)閉ループ系(フィードバック系)

ここで、① 閉ループ系の $Gyr(s)$ の安定性(BIBOか否か)を調べることは、 $1 - Gyr(s) = 1 / (1 + L(s))$ の安定性を調べること、つまり $1 + L(s)$ の零点を調べることと等価である。また、② $L(s)$ (開ループ伝達関数、一巡伝達関数という)の安定性(極)を調べることは、 $1 / L(s)$ の零点、これは $L(s)$ の絶対値が発散する場合であり、 $1 / (1 + L(s))$ の場合も同じになり、 $1 / (1 + L(s))$ の零点、つまり $1 + L(s)$ の極を調べることと等価である。

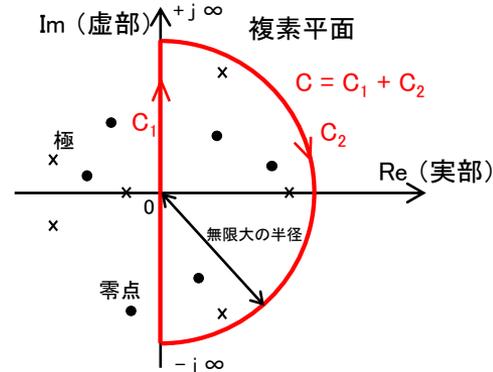
よって、動的システムの安定性を調べるには、①と②から $1 + L(s)$ の零点と極に関して、動的システムの安定性を左右する複素平面の右半平面(動的システムの実部)に限ってその関係を調べればよいことになる。つまり、複素右半平面において、①の閉ループ伝達関数から導いた $1 + L(s)$ の零点の数と ②の開ループ伝達関数から導いた $1 + L(s)$ の極の数との関係を調べることになる。

複素平面の右半平面全体を囲う閉路 C は虚軸上の $-j\infty \sim +j\infty$ の経路 C_1 と半径無限大の半円 C_2 で構成される(図12)。この閉路に対する $1 + L(s)$ のベクトル軌跡は、例えば(図13)のように描かれる(架空の $\omega = -j\infty \rightarrow 0$ の場合も含めてベクトル軌跡とした)。ここで偏角の原理(詳細は付録)によれば、閉路 C 内に $1 + L(s)$ の零点の数が Z 個、極の数が P 個あるとし、 $1 + L(s)$ のベクトル軌跡が原点の周りを時計方向にまわる回数を N をするとき、 $N = Z - P$ の関係が成り立つことが知られている。この関係を利用して閉ループの安定性を判別する方法がナイキストの安定判別法である。

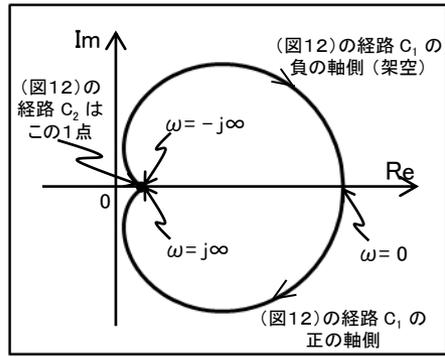
(図13)は $1 + L(s)$ のベクトル軌跡であるが、代わりに $L(s)$ のベクトル軌跡(図14)を考える。この軌跡を $L(s)$ の**ナイキスト軌跡**と呼ぶ。(図13)の原点は(図14)では $-1 + j0$ に移る。よって、(図14)では、原点の周りをまわる回数は $-1 + j0$ の周りをまわる回数に置き換わる。

さて、閉ループ系の安定性を調べるにあたり、知りたいのは閉ループ系の伝達関数(式9)の不安定極の数 Z であるが、開ループ伝達関数 $L(s)$ の不安定極の数が P であり、また実際に開ループ伝達関数 $L(s)$ のベクトル軌跡を描いて N の値が分かるので、(式10)を使って Z が求まる。

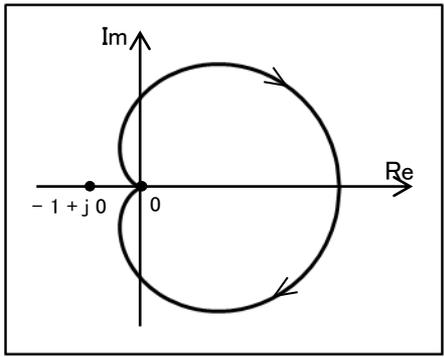
$$Z = N + P \quad \dots(式10)$$



(図12)複素平面の右半平面



(図13) $1 + L(s)$ のベクトル軌跡



(図14) $L(s)$ のベクトル軌跡

■ ナイキストの安定判別法

結局、開ループの伝達関数を使って閉ループ系の安定性を知ることができる。閉ループ系が安定であるための必要十分条件($Z = 0$)は、 $L(s)$ が安定($P = 0$)であれば、(式10)で $N = 0$ になる。つまり、閉ループ系が安定であるには開ループ伝達関数 $L(s)$ のナイキスト軌道は点 $-1 + j0$ を囲わない、つまり点 $-1 + j0$ はナイキスト軌道の外側にあることである。(図14)は、 $L(s) = 10 / (s + 1)$ のナイキスト軌跡である。極は $s = -1$ で実部が負、つまり安定であるが、(図14)でもナイキスト軌跡が点 $-1 + j0$ を囲っていないことで安定を確認できる。

5. 閉ループ系の安定性(安定余裕)

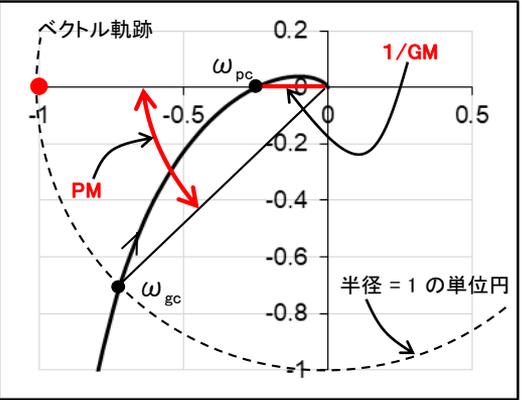
ナイキスト安定判別法では、開ループ伝達関数 $L(j\omega)$ のベクトル軌跡と点 $-1+j0$ との位置関係に着目した。ベクトル軌跡が点 $-1+j0$ を左側に見るときは安定、点 $-1+j0$ を越え軌跡の右側に点 $-1+j0$ を見ると不安定であると判別した。この関係に着目してベクトル軌跡と点 $-1+j0$ との間の距離を評価指標とする安定余裕の考え方が生まれた。フィードバック系の設計において重要な指標になっている(図15)。

- ・**位相余裕**(PM: phase margin): $|L(j\omega)| = 1$ となるときの角周波数 ω_{gc} をゲイン交差周波数といい、このときの位相が位相余裕である。

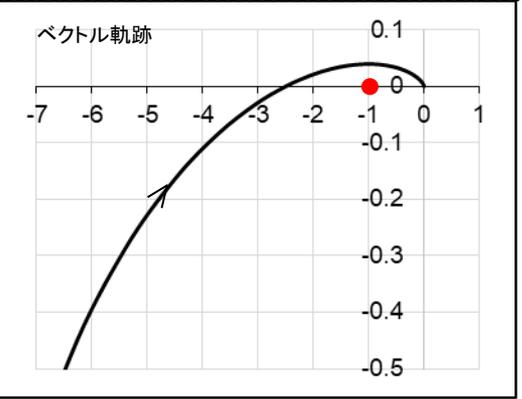
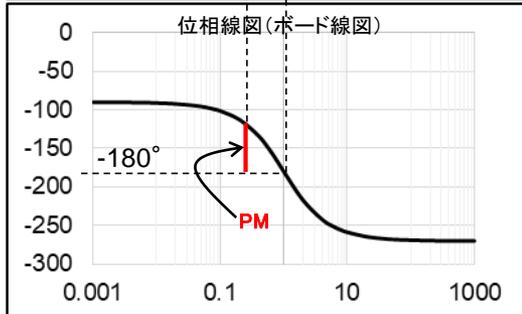
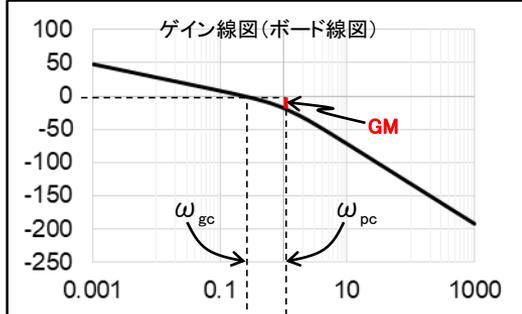
$$PM = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc}) \dots (式11)$$
- ・**ゲイン余裕**(GM: gain margin): $\angle L(j\omega) = -180^\circ$ となる角周波数 ω_{pc} を位相交差周波数といい、このときの $|L(j\omega_{pc})|$ の逆数がゲイン余裕である。

$$GM = 1 / |L(j\omega_{pc})| \dots (式12)$$

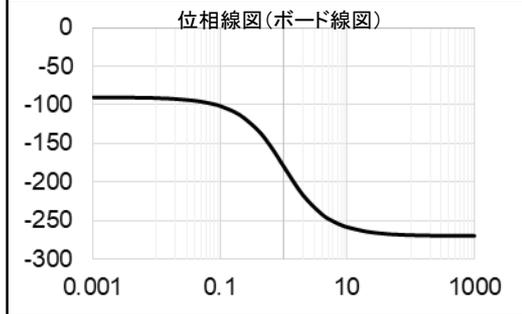
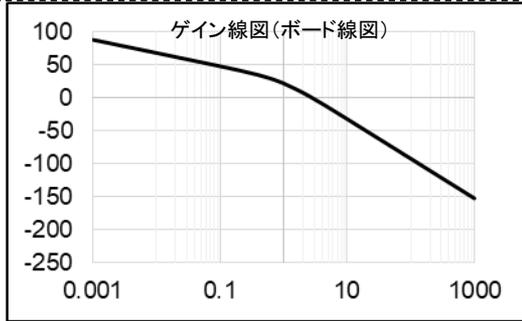
(図15)は安定な開ループ伝達関数のベクトル軌跡とボード線図である。ナイキスト軌跡は、点 $-1+j0$ を左側に見るので安定であることが分かる。また位相余裕とゲイン余裕を記入しておいた。
 (図16)は(図15)の分母の定数の値だけを大きくした開ループ伝達関数のベクトル軌跡とボード線図である。この場合のナイキスト軌跡は点 $-1+j0$ を右側に見るので不安定であることが分かる。ボード線図を見ても位相余裕もゲイン余裕も求まらないのが分かる(位相余裕はマイナス、ゲイン余裕は1以下になる)。



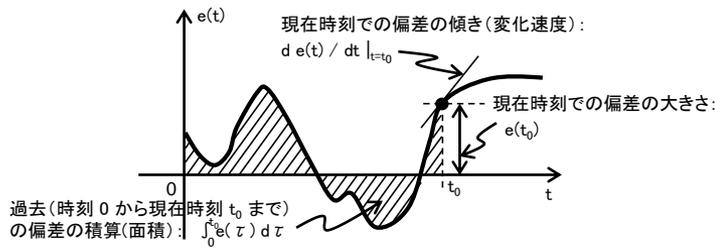
(図15)ベクトル軌跡とボード線図
安定な系 $L(s) = 0.5 / \{s(s+1)^2\}$
 なお、安定な系では、 $\omega_{pc} > \omega_{gc}$ の関係がある。



(図16)ベクトル軌跡とボード線図
不安定な系 $L(s) = 5 / \{s(s+1)^2\}$
 なお、(図15)と(図16)の位相線図は同じになる



6. PID制御



(図17)PID 制御要素の機能

■PID 制御要素の機能

別資料の「PID 制御の基礎知識」で触れているように、PID 制御はプロセス制御の分野で多く使用されており、各種のPID コントローラも発売されている。

PID 制御の基本形では、**P(比例:Proportional)要素**は、「**現在**」時刻での設定値(目標値)と出力の偏差を小さくする制御出力を計算する。**I(積分:Integral)要素**は、「**過去**」の偏差の累積(積分)をクリアしてゼロにするための制御出力を計算する。**D(微分:Differential)要素**は、「**少し未来**」を見て偏差の増減の速度を抑えるための制御出力を計算する(図17)。

■PID 制御の種類

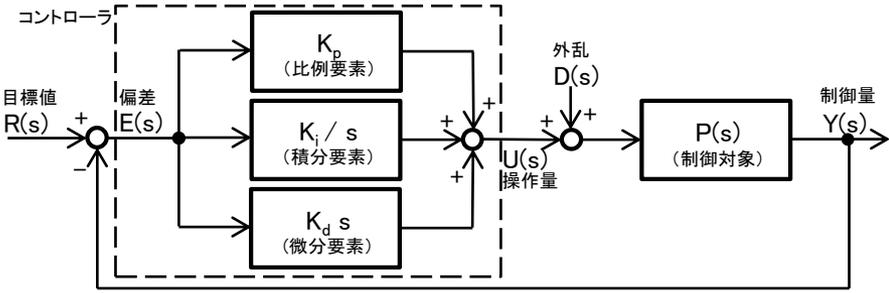
PID パラメータ

- K_p : 比例ゲイン
- K_i : 積分ゲイン
- K_d : 微分ゲイン

1) 基本形(PID 制御)

伝達関数表現: $U(s) = (K_p + K_i / s + K_d s) E(s)$

時間領域表現: $u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d d e(t) / dt$

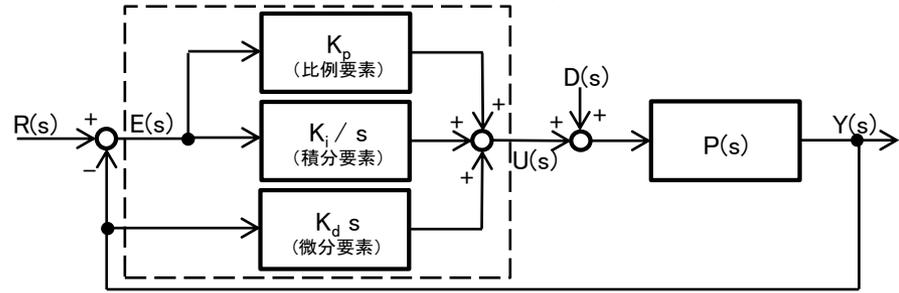


(図18)基本形のPID 制御のブロック図

2) 微分先行型(PI-D 制御: 急激な偏差変化の影響を排除)

伝達関数表現: $U(s) = (K_p + K_i / s) E(s) + K_d s Y(s)$

時間領域表現: $u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d d y(t) / dt$

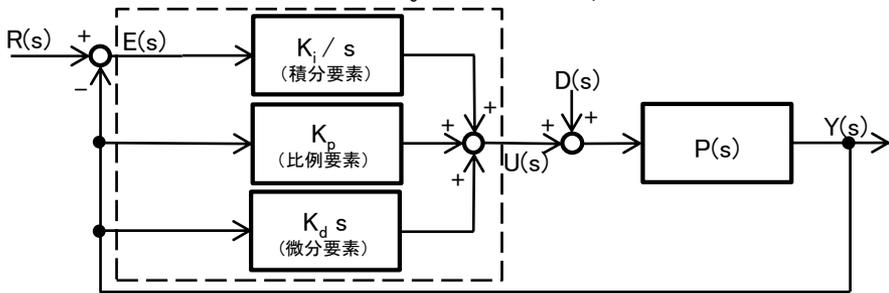


(図19)P-ID 制御のブロックs図

3) 比例微分先行型(I-PD 制御: 急激な偏差変化の影響を徹底排除)

伝達関数表現: $U(s) = (K_i / s) E(s) + (K_p + K_d s) Y(s)$

時間領域表現: $u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_p y(t) + K_d d y(t) / dt$



(図20)I-PD 制御のブロック図

■PIDパラメータ(K_p, K_i, K_d)のチューニング方法

1) 限界感度法

実験で取得したデータにもとづいてチューニングする方法で、P制御で比例ゲインを徐々に大きくしていき、持続振動を発生させ、そのときの比例ゲインと周期を使って調整する。

2) ステップ応答法

これも実験ベースの方法である。ステップ応答の波形からムダ時間と立ち上がりの接線の傾きを使って求める。

3) モデルベース法

目標とする制御プロセスの出力波形を予め設定しておき(これを規範モデルという)、このモデルにマッチするような波形が出力されるように伝達関数のパラメータを調整する。

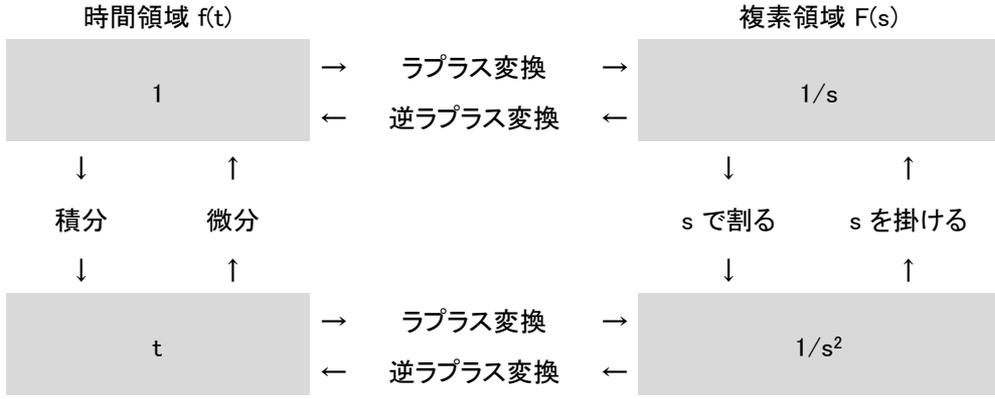
付録1. 基本的な関数のラプラス変換 (Laplace transform)

■ 基本的な関数のラプラス変換

基本的な関数のラプラス変換 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ と逆ラプラス変換 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ を(付表1)に示す。中でも微分積分のラプラス変換の関係(付図1)が重要で、微分方程式を解く際に、時間領域の微分方程式をラプラス変換して複素領域の代数方程式にし、代数方程式を代数方程式として解き、その後、逆ラプラス変換によって時間領域に戻すという方法がよく採られる。

(付表1) 基本的な関数のラプラス変換

時間領域 $f(t)$	複素領域 $F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$1/s$
t	$1/s^2$
e^{at}	$1/(s-a)$
$t e^{at}$	$1/(s-a)^2$
$\sin t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$\cos t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
$e^{at} \sin t$	$\omega / \{ (s-a)^2 + \omega^2 \}$
$e^{at} \cos t$	$(s-a) / \{ (s-a)^2 + \omega^2 \}$



(付図1) 微分・積分とラプラス変換の関係

■ ラプラス変換の特徴

代表的な特徴を(付表2)にまとめておく。

(付表2) 代表的なラプラス変換の特徴

性質	内容 $d y(0)$
線形性	$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + \dots + a_k f_k(t)] = a_1 F_1(s) + \dots + a_k F_k(s)$
時間領域微分	$\mathcal{L}[df(t)/dt] = s F(s) - f(0)$
時間領域積分	$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau) d\tau] = (1/s) F(s)$
時間領域推移	$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} F(s)$
複素領域推移	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$
最終定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$
畳み込み積分	$\mathcal{L}[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau] = F(s) G(s)$

(例) ラプラス変換、逆ラプラス変換を使った微分方程式の解き方
次の2次の微分方程式を解く。

$$d^2 y(t) / dt^2 + 5 dy(t) + 6 y(t) = e^{-3t} \quad y(0) = 0, \quad dy(0) / dt = 0$$

この式をラプラス変換すると、

$$s^2 Y(s) + 5s Y(s) + 6 Y(s) = 1 / (s + 3)$$

この式を部分分数展開すると、

$$Y(s) = 1 / \{ (s+2)(s+3)^2 \} \\ = -1 / (s+3)^2 - 1 / (s+3) + 1 / (s+2)$$

これを、逆ラプラスして、次式(微分方程式の解)を得る。

$$y(t) = -t e^{-3t} - e^{-3t} + e^{-2t}$$

付録2. 留数定理 (Residue Theorem)

■ ローラン展開

複素関数 $f(s)$ が $s = a$ で微分可能であるとき、 $s = a$ で、冪(べき)級数展開できる。

$$f(s) = a_0 + a_1 (s - a) + a_2 (s - a)^2 + \dots \quad \dots (付式1)$$

また、 $\phi(s)$ が $s = a$ で n 位の極を持つ関数 ($s = a$ で無限大になる関数) であるとき、つまり $(s - a)$ という因子を分母に n 個持つ関数であるとき、 $(s - a)^n$ を掛けた $(s - a)^n \phi(s)$ は冪級数展開できる(このような関数 $\phi(s)$ を有理形関数という)。

$$(s - a)^n \phi(s) = a_0 + a_1 (s - a) + a_2 (s - a)^2 + \dots \quad \dots (付式2)$$

(付式2)の両辺を $(s - a)^n$ で割って、新たに係数を設定し直す。負のべきの項も含むこの展開(付式3)をローラン展開という。

$$\phi(s) = a_{-n} (s - a)^{-n} + a_{-(n-1)} (s - a)^{-(n-1)} + a_{-1} (s - a)^{-1} + a_0 + a_1 (s - a) + a_2 (s - a)^2 + \dots = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (s - a)^k \quad \dots (付式3)$$

■ 留数定理

(付図2)に示すように、複素平面に極(特異点)を囲む半径 R の積分経路(閉路) C を設け、(付式3)を積分する。

$$\int_C \phi(s) ds = \int_C \left\{ \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (s - a)^k \right\} ds = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k \int_C (s - a)^k ds \quad \dots (付式4)$$

ここで、 $s = a + R e^{j\theta}$ と変数変換する。 s は中心 a 、半径 R の円周になる。よって積分範囲は $0 \sim 2\pi$ になる。

$$k = -1 \text{ のとき} \quad \int_C \phi(s) ds = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} R^k e^{jk\theta} j R e^{j\theta} d\theta = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k j R^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{j(k+1)\theta} d\theta = a_{-1} j \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi j a_{-1} \quad \dots (付式5)$$

$$k \neq -1 \text{ のとき} \quad \int_C \phi(s) ds = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k j R^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{j(k+1)\theta} d\theta = \sum_{k=-n}^{\infty} j R^{k+1} \left[\frac{e^{j(k+1)\theta}}{j(k+1)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

つまり、 $\phi(s)$ が $s = a$ で n 位の極を持つ有理形関数であるとき、次式が成立する。これを、留数定理という。

$$\int_C \phi(s) ds = 2\pi j a_{-1} \quad \dots (付式6)$$

なお、この式が示すように半径 R の影響はないので、積分経路は通常閉路であればよい。

ここで、 a_{-1} を留数と呼ぶ。ローラン展開の(付式3)で残った(留まった)係数である。留数は以下のようにして求めることができる。

$$\lim_{s \rightarrow a} (d^{n-1}/ds^{n-1}) \{ (s - a)^n \phi(s) \} = \lim_{s \rightarrow a} (d^{n-1}/ds^{n-1}) \{ a_{-n} + a_{-(n-1)} (s - a) + \dots + a_{-1} (s - a)^{n-1} + a_0 (s - a)^n + \dots \}$$

$$= \lim_{s \rightarrow a} \{ (n-1)! a_{-1} + n! a_0 (s - a) + 1/2 a_1 (s - a)^2 + \dots \} = (n-1)! a_{-1} \quad \dots (付式7)$$

よって、 $\phi(s)$ の留数 a_{-1} を $\text{Res } \phi(s)$ で表すと、以下の式で計算できる。

$$a_{-1} = \text{Res } \phi(s) = \left\{ 1 / (n-1)! \right\} \lim_{s \rightarrow a} (d^{n-1}/ds^{n-1}) \{ (s - a)^n \phi(s) \} \quad \dots (付式8)$$

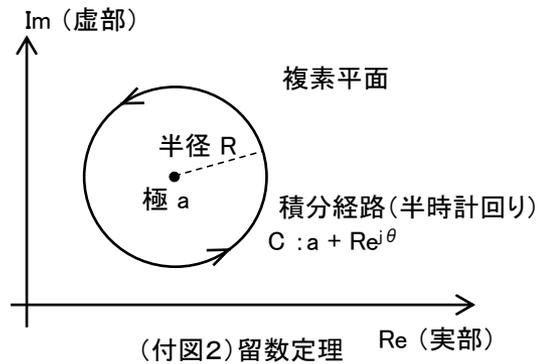
なお、極が同じ閉路内に複数個 (n 個) ある場合の留数は、極 ($s = s_k$) ごとの留数の和になる。

$$\int_C \phi(s) ds = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Res } \phi(s_k) \quad \dots (付式9)$$

面白いことに、複素積分は留数の和で求めることができる(積分といいながら積分しない)。

また、 $\phi(s)$ が正則で極を持たない場合は(付式10)となる。コーシーの積分定理という。

$$\int_C \phi(s) ds = 0 \quad \dots (付式10)$$

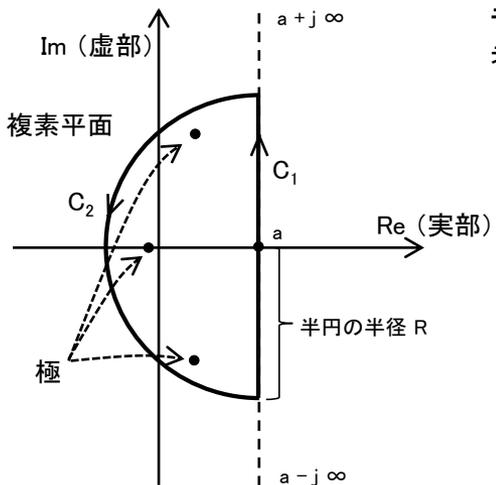


付録3. ラプラス変換の反転公式 (逆ラプラス変換)

■ラプラス変換の反転公式

ラプラスの反転公式は、(付式11)で与えられる。
 時間領域の関数 $f(t)$ をラプラス変換して複素領域の関数 $F(s)$ に変換するとき $f(t)$ を e^{-st} で減衰させているので、複素領域の関数 $F(s)$ を時間領域の関数 $f(t)$ に戻すときは、逆に e^{st} で膨らませて戻すといった感じである。また、 $1/2\pi j$ は複素積分の閉路経路で (付式5) のように算出される $2\pi j$ を相殺している、といったイメージである。

$$f(t) = 1 / (2\pi j) \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad \text{ただし、} a > F(s) \text{ の極の実部} \quad \dots \text{(付式11)}$$



積分経路 C_1 : $a - jR \sim a + jR$
 積分経路 C_2 : $a + Re^{j\theta} \ (\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2)$
 (付図3)ラプラスの反転公式

ラプラスの反転公式を計算するにあたっては、(付図3)に示すような半径 R の半円の積分経路で考え、後で半径を広げる ($R \rightarrow \infty$ とする)。

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 / (2\pi j) \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s) e^{st} ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (1 / (2\pi j) \int_{a-jR}^{a+jR} F(s) e^{st} ds) = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 / (2\pi j) \int_{C_1} F(s) e^{st} ds) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \{ 1 / (2\pi j) (\int_{C_1+C_2} F(s) e^{st} ds - \int_{C_2} F(s) e^{st} ds) \} \\ &= 1 / (2\pi j) (2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Res} (F(s) e^{st}, s = s_k) - 0) \quad \text{但し、Res : 極 } s = s_k \text{ のときの留数} \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Res} (F(s) e^{st}, s = s_k) \quad \dots \text{(付式12)} \end{aligned}$$

ここでは、円弧を積分路とした、 $F(s)$ に e^{st} を掛けた関数の積分は 0 になるという **Jordan の補助定理** (付式13) を使用している。ここでは、積分経路 = 円弧 = C_2 である。

$$\int_{\text{円弧}} F(s) e^{st} ds = 0 \quad \dots \text{(付式13)}$$

(簡単な計算例)

ここでは、 $f(t) = t$ をラプラス変換して、 $F(s) = 1/s^2$ を求める。次いで、 $F(s) = 1/s^2$ を逆ラプラス変換して、 $f(t) = t$ に戻す。

$f(t) = t$ をラプラス変換して $F(s)$ を得る。

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = [(-t/s) e^{-st}]_0^{\infty} + 1/s \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 + 1/s [(-1/s) e^{-st}]_0^{\infty} = 1/s^2 \end{aligned}$$

式では、部分積分 $\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$ を利用
 ここで、 f' は $d f(x) / dx$ 、 g' は $d g(x) / dx$ を表す。

$F(s) = 1/s^2$ を逆ラプラス変換して $f(t)$ を得る。
 なお、 $F(s)$ の極は、 $s = 0$ (2 位の極) である。(付式8) 利用。

$$\begin{aligned} f(t) &= (1/(2\pi j)) \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \text{Res} (F(s) e^{st}, s = 0) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \{ d/ds (s^2 F(s) e^{st}) \} = \lim_{s \rightarrow 0} \{ d/ds (e^{st}) \} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} (t e^{st}) = t \end{aligned}$$

付録4. 正弦波応答: 周波数応答(Frequency Response)

制御対象に正弦波を入力すると、出力は同じ角周波数を持つ正弦波になる(付図4)。ただし、入出力の振幅比と位相差は角周波数の影響を受ける。ここで、入力正弦波のとき、出力も正弦波になることを確認する。



正弦波入力 $u(t) = A \sin \omega t$ のラプラス変換は、 $U(s) = A \omega / (s^2 + \omega^2)$ なので、(式4)の形で表す制御対象の伝達関数を部分分数に展開すると、出力は(付式15)のように表される。

$$Y(s) = G(s) U(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) / (s_n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) \{ A \omega / (s^2 + \omega^2) \} \quad \dots (付式14)$$

ここで(付式14)を、伝達関数の分母 = 0 となる極(実数の根と共役複素数の根)、および入力の分母 = 0 となる共役複素数の根の因子で部分分数に展開する。

$$Y(s) = \sum_{i=1}^q D_i / (s - \alpha_i) + \sum_{k=1}^r [G_k \omega_k / \{ (s - \beta_k)^2 + \omega_k^2 \} + H_k (s - \beta_k) / \{ (s - \beta_k)^2 + \omega_k^2 \}] + A_1 / (s - j\omega) + A_2 / (s + j\omega) \quad \dots (付式15)$$

但し、 D_i, G_k, H_k, A_1, A_2 は定数

この式を、逆ラプラス変換して時間領域の関係に戻す(付録のラプラス変換表を参照)。

$$y(t) = \sum_{i=1}^q D_i e^{\alpha_i t} + \sum_{k=1}^r e^{\beta_k t} (G_k \sin \omega_k t + H_k \cos \omega_k t) + A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} \quad \dots (付式16)$$

ここで、出力 $y(t)$ が安定な場合を考えると $\alpha_i < 0, \beta_k < 0$ であり、第一項と第二項は時間が十分に経過すると 0 となる。よって、時間が十分に経過したときの出力を求めると、

$$y(t) = A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} \quad \dots (付式17)$$

係数 A_1 と A_2 は「ヘビサイドの展開定理」を使って求めることができる。

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) G(s) A \omega / (s^2 + \omega^2) = \lim_{s \rightarrow j\omega} G(s) A \omega / (s + j\omega) = G(j\omega) A \omega / (2j\omega) = -(A / 2) j G(j\omega) \quad \dots (付式18)$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) G(s) A \omega / (s^2 + \omega^2) = \lim_{s \rightarrow -j\omega} G(s) A \omega / (s - j\omega) = G(-j\omega) A \omega / (-2j\omega) = (A / 2) j G(-j\omega) \quad \dots (付式19)$$

$G(j\omega)$ と $G(-j\omega)$ は複素数であるので、 $G(j\omega) = a + j b, G(-j\omega) = a - j b$ と置き、「三角関数の合成の公式」を使って、

$$y(t) = -(A / 2) j (a + j b) e^{j\omega t} + (A / 2) j (a - j b) e^{-j\omega t} = A b \cos \omega t + A a \sin \omega t = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad \dots (付式20)$$

但し、 $|G(j\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (ゲイン), $\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(b / a)$ (位相差、正で位相進み、負で位相遅れ)

よって、**入力が正弦波のとき出力は同じ角周波数を持つ正弦波になることが分かる。但し、出力の振幅は $|G(j\omega)|$ 倍に、位相差は偏角 $\angle G(j\omega)$ になる。** なお、(付式18)と(付式19)で伝達関数 $G(s)$ は $G(j\omega)$ に変わる。 $G(j\omega)$ は**周波数伝達関数**と呼ばれている。

■ヘビサイドの展開定理
多項式で表される分数を部分分数に展開するときに使用できる。

$$N(s) / D(s) = \sum_{i=1}^n K_i / (s - p_i) \quad \text{であるとき、}$$

係数は次の式で求まる。

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \{ N(s) / D(s) \}$$

■三角関数の合成の公式
 $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$

ただし、
 $\cos \alpha = a / \sqrt{a^2 + b^2}$
 $\sin \alpha = b / \sqrt{a^2 + b^2}$

付録5. 偏角の原理 (Argument Principle)

■ 偏角の原理とは

$f(s)$ が複素平面上の閉じた経路 C (積分経路は反時計回り) の内側で有理形関数 (留数定理の項参照) で、 $f(s)$ の微分 $f'(s)$ が C 上に零点も極も持たないとき、 $\int_C f'(s) / f(s) ds$ を計算する。

$f(s)$ の零点を s_N (重複度 k) とすると、

$$f(s) = (s - s_N)^k g(s), \quad g(s_N) \neq 0$$

$$f'(s) = k(s - s_N)^{k-1} g(s) + (s - s_N)^k g'(s) \quad \text{よって、} f'(s) / f(s) = k / (s - s_N) + g'(s) / g(s)$$

ここで、 $g(s_N) \neq 0$ であるので、 $f'(s) / f(s)$ の零点 s_N における留数は k (重複度) になる。

同様に、 $f(s)$ の極を s_P (重複度、つまり位数 m) とすると、

$$f(s) = (s - s_P)^{-m} h(s), \quad h(s_P) \neq 0$$

$$f'(s) = -m(s - s_P)^{-m-1} h(s) + (s - s_P)^{-m} h'(s) \quad \text{よって、} f'(s) / f(s) = -m / (s - s_P) + h'(s) / h(s)$$

ここで、 $h(s_P) \neq 0$ であるので、 $f'(s) / f(s)$ の極 s_P における留数は $-m$ (位数) になる。

結局、留数 k は重複度も数えた零点の個数 Z になり、留数 $-m$ は重複度も数えた極の個数 P になる。よって、留数定理より、

$$\int_C f'(s) / f(s) ds = 2\pi j (Z - P) \quad \dots (\text{付式21})$$

が求まる。(付式21)が偏角の原理の式である。

なお、後述の(付式24)で分かるように、この式は偏角 θ の総変化量を表しているとも言える(偏角の原理の名前の由来)。

■ 偏角の原理と複素平面上のベクトル軌跡の回転数

置換積分 ($f'(s) = d f(s) / ds$, $C \rightarrow \Gamma$) を用いると、(付式21)の左辺は(付式22)のように表すことができる。

$$\int_C f'(s) / f(s) ds = \int_{\Gamma} (1 / f(s)) d f(s) \quad \dots (\text{付式22})$$

ここで、 $f(s) = r e^{j\theta}$ という極座標表示 (中心が原点で半径 r の円を表す関数) を用いれば、

$$d f(s) = (\partial f(s) / \partial r) dr + (\partial f(s) / \partial \theta) d\theta = e^{j\theta} dr + j r e^{j\theta} d\theta$$

$$\text{よって、} (1 / f(s)) d f(s) = (1 / r) dr + j d\theta$$

$$\text{結果として、} \int_C f'(s) / f(s) ds = \int_{\Gamma} \{(1 / r) dr + j d\theta\} = (\ln r - \ln r_0) + j(\theta - \theta_0) \quad r_0, \theta_0 \text{ は初期値}$$

ここで、積分路 C は閉曲線であり、積分開始点と終了点の半径は同じになる。つまり、 $\ln r - \ln r_0 = 0$ である。

$$\text{従って、} \int_C f'(s) / f(s) ds = j\theta \quad \dots (\text{付式23})$$

(付式21)と(付式23)より、原点のまわりを反時計回りに積分路 C を取り、写像の軌跡 Γ も反時計回りであれば $Z - P = \theta / 2\pi$ となるが、写像の軌跡 Γ が時計回りであれば $Z - P = -\theta / 2\pi$ となる。角周波数 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ でベクトル軌跡描くと、ベクトル軌跡は時計回りになるので、制御では時計回りで軌跡を考えることになる。そこで次の(付式24)が使用される。

$$Z - P = -\theta / 2\pi \quad \text{つまり、} Z - P = \text{原点を時計方向にまわる回転数} \quad \dots (\text{付式24})$$

付録6. 偏角の原理を視覚的に理解する

複素関数 $F(s)$ を多項式(付式25)で表す。

$$F(s) = \{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)\} / \{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)\} \quad \cdots \text{(付式25)}$$

ここで、 z_1, z_2, \cdots, z_n は零点、 p_1, p_2, \cdots, p_n は極

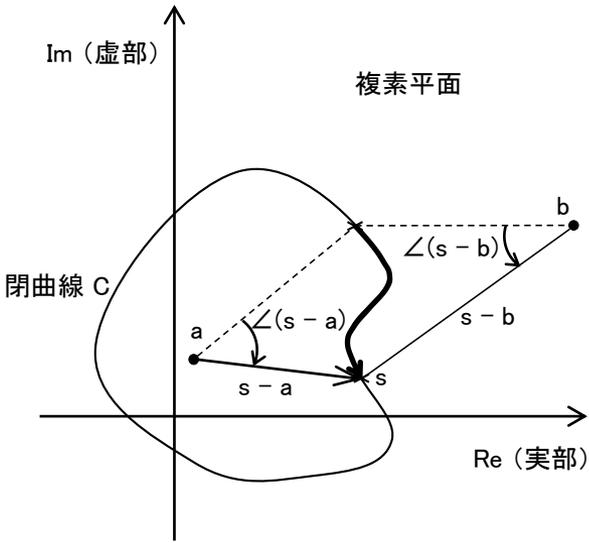
すると、 $F(s)$ の偏角は(付式26)で表すことができる(偏角を \angle で表す)。

$$\angle F(s) = \{\angle(s - z_1) + \angle(s - z_2) + \cdots + \angle(s - z_n)\} - \{\angle(s - p_1) + \angle(s - p_2) + \cdots + \angle(s - p_n)\} \quad \cdots \text{(付式26)}$$

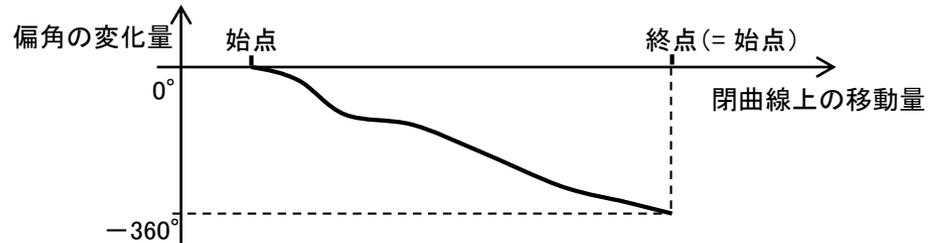
ここで、複素平面上に閉曲線 C を用意し、その上を複素数 s が移動したときの関数を考える。このとき、閉曲線 C の内側に点 a 、閉曲線 C の外側に点 b を考える(付図5)。ここで点とは、零点、もしくは極のことを言う。

すると、閉曲線 C の内側にある点 a に関しては、閉曲線 C 上を時計回りに一周する点 s とのベクトル $s - a$ の偏角 $\angle(s - a)$ の変化量は(付図6)のイメージに示すように -360° になる。一方、閉曲線 C の外側にある点 b に関する偏角 $\angle(s - b)$ の変化量は(付図7)のイメージに示すように 0° になる。この考察から閉曲線 C の内側にある点、それが $F(s)$ の零点である場合、つまり(付式25)の分子の多項式の零点である場合には零点の数だけ時計回りに回転することになる。閉曲線 C の内側にある点 a が $F(s)$ の極である場合、つまり、(付式25)の分母の多項式の零点である場合には極の数だけ反時計回りに回転することになる。

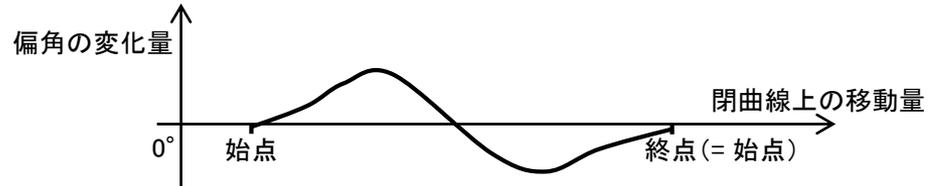
よって、**閉曲線 C の内側に Z 個の零点、 P 個の極がある場合、(付式25)の $F(s)$ は、原点の周りを時計回りに $Z - P$ 回、回転する。**



(付図5) 偏角

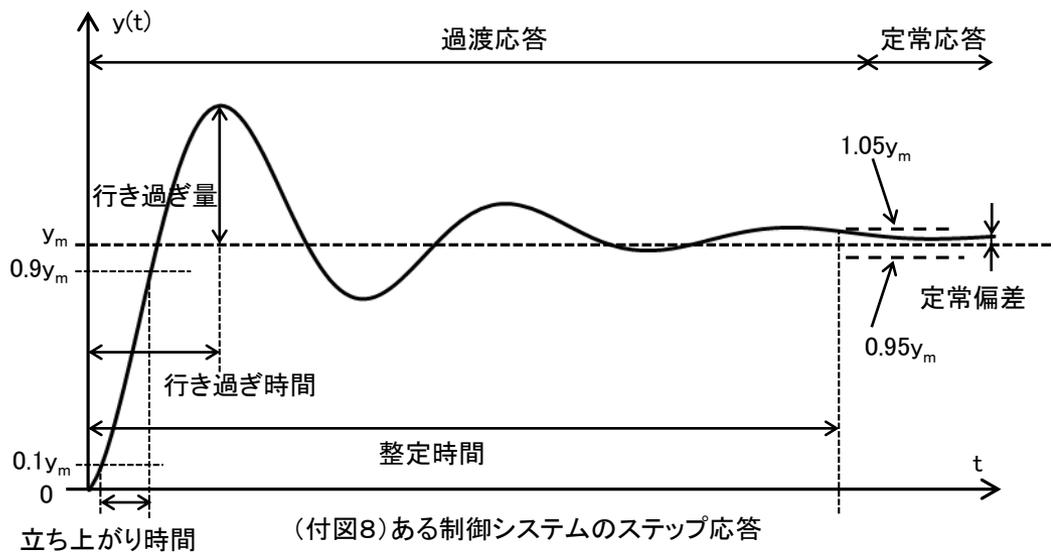


(付図6) 閉曲線の内側に零点、もしくは極がある場合の偏角の変化量(イメージ)



(付図7) 閉曲線の外側に零点、もしくは極がある場合の偏角の変化量(イメージ)

付録7. 制御性能(時間応答)の指標



- y_m : 制御システムの目標値
- 定常値 : 時間 $\rightarrow \infty$ のときの制御システムの出力値 y_∞
- 定常偏差 = $y_m - y_\infty$
- 整定時間 : 出力 $y(t)$ が目標値 y_m の 95 ~ 105% の間に収まるまでにかかる時間
- 立ち上がり時間 : 目標値 y_m の 10% から 90% になるまでにかかる時間
- 行き過ぎ量 : 出力が目標値 y_m を越えて到達する最大値
- 行き過ぎ時間 : 行き過ぎ量になるまでにかかる時間

制御性能は、制御の安定性と追従性で評価することができる。

制御系の安定性は伝達関数の分母 = 0 の式(特性多項式)に着目し、実部が正になる不安定な極を持たないときに安定であると確認できる。ナイキスト判別式を使用して安定性を確認することができる。

一方、追従性は、定常応答と過渡応答で性能を確認する。定常応答は時間が十分に経過したときの応答であり、目標値に対する定常偏差の大きさを応答が収束しているかどうかを判断する。過渡応答は即応性を見る。立ち上がり時間が短い、整定時間が長くないかが、その判断基準になる。また、行き過ぎ量が大きいと振動の減衰に時間がかかる懸念が生じる(ただし、振動は必ずしも発生するものではない)。また、ボード線図のゲイン線図で、バンド幅が広いと高周波帯域での信号の追従性優れていると確認できる。

■ 時定数

1次遅れ系(伝達関数の分母の s の次数が 1 次の系)では、応答特性を表す指標として、時定数がよく使用される。

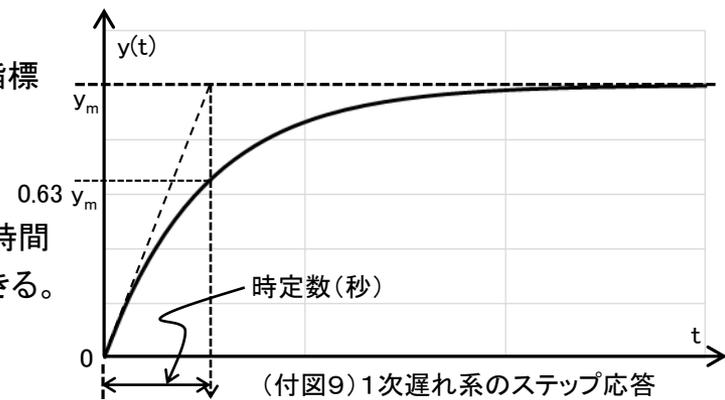
1次遅れ系のステップ応答の一例を(付図9)に示す。

1次遅れ系の伝達関数は、次式で表される。

$$G(s) = 1 / (Ts + 1) \quad T \text{ を時定数という、目標値の } 63\% \text{ になるまでに要する時間}$$

この伝達関数のステップ入力の時間応答は、逆ラプラス変換で求めることができる。(付図9)に時間応答の様子を示す。

$$y(t) = K (1 - e^{(-1/T)t}) \quad K \text{ は定数}$$



参考にした書籍とURL

佐藤和也、平元和彦、平田研二：「はじめての制御工学」、講談社

タマキ(環耀)：「複素積分」、[【前編】複素関数論ショートコース【複素積分って何？】【ローラン展開って何？】 - YouTube](#)

タマキ(環耀)：「複素積分」、[【後編】複素関数論ショートコース【留数定理】【コーシーの積分定理】 - YouTube](#)

足立修一(慶応義塾大学)：「ラプラス変換」、[物理情報数学C ラプラス変換の性質,ラプラス変換を用いた微分方程式 解法 - YouTube](#)

大関真之(東北大学)：「ラプラス変換」、[ラプラス変換\(1-1\)【応用数学B第1回オンデマンド動画・2020年度東北大学工学部】 - YouTube](#)

南祐樹(大阪大学)：「制御系設計論」、[【Vol.1】制御系設計論 第1回 その1 - YouTube](#)