統計的検定の手順

2023年1月（作成）
倉谷 隆博

1. 統計的検定の手順（1/4）

統計的検定は、検定対象の仮説を棄却するのか、受容するのか、それとも他の仮説を採択するのか、という判断を下すことを言う。
例えば、製造工程の工程条件を変更することが製品品質に影響を与えるのか否かを、実験データをもとに判断する必要がある。このとき、製造工程の工程条件を変更する前後の実験データに差は生じなかったとする仮説を設定し、その仮説のもとで実験データを統計的に評価する。その結果、仮説が誤りである可能性が高いと判断されれば、その仮説を棄却し、対立する仮説（差があるという仮説）を採択する。このようなプロセスが統計的検定である。

仮説検証の方法

ある仮設が正しいことを示すには、その仮説のもとで起こること「全て」が正しいことを確認しなくてはならない。
例えば、「水はどんなときでも100℃で沸騰する」という仮説は、この仮説の正しさを証明するためには世界中のあらゆるところで、水が100℃で沸騰することを確認しなくてはならない。しかし、これは不可能である。一方、逆に、「水はいつも100℃で沸騰するわけではない」ことを証明することは簡単である。100℃で沸騰するのではない事実を1つでも見つければ、それで証明できたことになる。例えば、気圧が低くなる山の上では水は100℃より低い温度で沸騰する。よって、「水はいつでも100℃で沸騰する」という仮説を、簡単に棄てる（棄却する）ことができる。このような方法は、ある仮説の正否を判断するために、その逆を仮説にして判断する方法である（背理法と呼ばれている）。
採択できるか否かを判断するのは難しいが、棄却できるか否かの判断は容易である、ことを示している。統計の仮説検定では、この背理法が使用される。

=== 統計的検定の手順 ===

【手順1】検定対象に適した検定方法を、検定対象と前提条件をもとに決める（表1参照）。

【手順2】事前分析を行って、サンプルサイズを決める。
有意差と検出力、そして事前情報として得た効果量の目安（いずれも後述）に基づいて、サンプルサイズを決め、標本データを採取する。

【手順3】帰無仮説と対立仮説を設定する。
①上述したように、まず棄却できるか否かの判断の対象になる仮説を用意する。 この仮設を「帰無仮説」と言う。帰無仮説を棄却するのが統計的検定のゴールになる。棄却されることを期待する、無に帰することを期待する仮説、という意味で、「帰無仮説（null hypothesis）」という名前が付いている。
②帰無仮説の逆の仮説を用意する。 この仮説を「対立仮説」（alternative hypothesis）と言う。
帰無仮説が棄却されることを期待して、通常は対立仮説に主張したいことを用意する。

帰無仮説が統計的に受容できるものでなければ棄却することになる。帰無仮説を棄却することになれば、この逆の「対立仮説」を採択することになる。

（例）
外食チェーン店である施策を実施したとき、店舗の客数に変化があったか否かを確認したい。
言い換えれば、「施策前の週間客数の平均値」と「施策後の週間客数の平均値」に差があるか否かを検定したい。

帰無仮説を棄却することができれば、対立仮説を採択できる。
・帰無仮説 ＝ 施策前の客数の平均値と施策後の客数の平均値に差はない。
・対立仮説 ＝ 施策前の客数の平均値と施策後の客数の平均値に差がある（もし、そうであれば、「施策が店舗の客数に変化を与えた。」といえる。

【手順4】片側検定と両側検定のいずれかを選択する。
帰無仮説に対する対立仮説の置き方によって、片側検定にするのか、両側検定にするのかを決める。
例えば、上記の例では、施策前の客数の平均値と施策後の客数の平均値に差があるという対立仮説を設定しているが、
この対立仮説では客数の増減は問うていない。つまり、増加も減少も検定の対象にするということをいっており、このような検定は両側検定になる。
それに対して、施策後の客数の平均値が増えたという対立仮説を設定すれば、増加の検定のみを行うことになる。このような検定を片側検定という。

【手順5】帰無仮説の棄却の基準となる有意水準（確率）を決める。
帰無仮説のもとで起こった事象が偶然でなく「極めて稀な」ことであれば、その発生確率は極めて低いと言える。この「極めて稀な」確率を有意水準という。
「極めて稀な」ことであるが、偶然ではなく、必然的な意味があるという意味で、「有意」という言葉が使われる。そして、「極めて稀な」ことが起きたのは仮説が誤っていたからだと捉え、帰無仮説を棄却する。なお、有意水準（確率）としては、5％または、1％が利用されている。

1. 統計的検定の手順(2/4)

【手順6】検定統計量を計算する。

帰無仮説が成り立つ前提での検定統計量を(表1)の式を使用して求める。次いで、求めた検定統計量の確率(p 値)を求める。
例えば、標準正規分布に従う検定統計量で、帰無仮説に基づく確率変数の実現値が 1.5 であったとき、Excel 関数を使用すれば、このときの確率変数の実現値 1.5 に対応した確率である p 値 = 1 − NORM.DIST(1.5, 0, 1, TRUE) = 6.68 % が求まる。

【手順7】検定統計量の確率(p 値)と有意水準(確率、通常 1 % もしくは 5 %)とを比較して、棄却/採択の判断を下す。

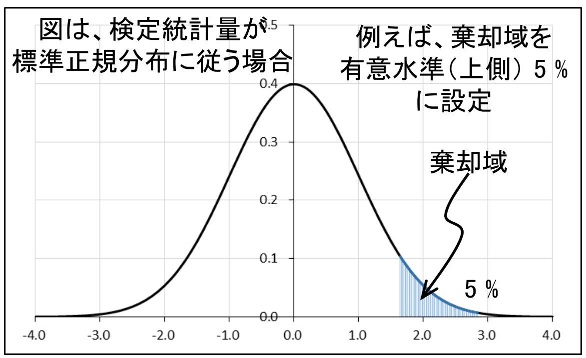
p 値 ≦ 有意水準　であれば、仮説が誤っているから起こり得ないことが起きたと判断し、帰無仮説を棄却し、対立仮説を採択する。
p 値 > 有意水準　であれば、仮説に問題がなく起こるべくして起きたことだと判断し、帰無仮説を棄却することはできず、帰無仮説を受容する。

有意水準より小さな確率は、極めて稀なことが起きたことを示し、それは帰無仮説が誤っていたためだと判断し、帰無仮説を棄却をする。
片側検定の場合は(図1)で、両側検定の場合は(図2)で棄却域を示す。

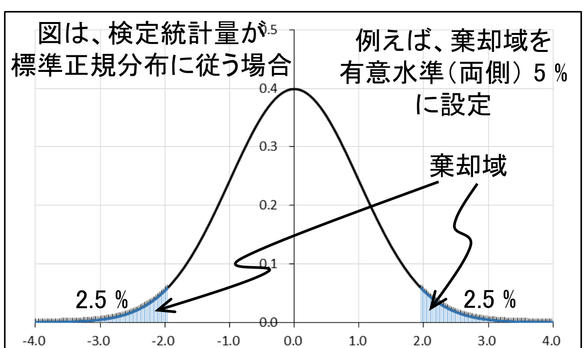
【手順8】検定結果を確認する(事後分析)。

正しい仮説を正しいと判定する検出力が設定した検出力を満足しているか、検定品質として確認しておく。

以上の検定の流れをまとめたのが、(図3)である。



(図1)片側検定



(図2)両側検定

【手順1】検定方法を決める(表1を参照)

↓

【手順2】標本データ採取のサンプルサイズを決める(事前分析)
有意差と検出力と効果量に基づいて決める

↓

【手順3】帰無仮説と対立仮説を設定する
帰無仮説: 否定したい仮説(なかったことにしたい仮説)
対立仮説: 主張したい仮説(帰無仮説の反対の仮説)

↓

【手順4】片側検定と両側検定のいずれかを選択する
(図1)と(図2)を参照

↓

【手順5】帰無仮説の棄却の基準となる有意水準(確率)を決める
よく用いられるのが、5 % と 1 %

↓

【手順6】検定統計量を計算する

↓

【手順7】検定統計量の確率(p 値)と有意水準とを比較して、棄却/採択の判断を下す
p 値が有意水準以下ならば、帰無仮説を棄却して対立仮説を採択する
p 値が有意水準より大きければ、帰無仮説を受容する

↓

【手順8】満足できる検出力であるかどうかを確認する(事後分析)

(図3)検定の流れ

1. 統計的検定の手順(3/4)

主な検定方法をまとめて示す。
(表1−1)と表(1−2)は正規分布を前提条件とするパラメトリック検定であり、(表2)は特定の確率分布を前提としないノンパラメトリック検定である。
どの検定方法を使うかは、これらの表から、検定対象と前提条件を考慮して選択する。例えば、前例で挙げた施策前後で店舗客数の平均値に変化があったかどうかを検定し、施策の有効性を確認したいときには、母平均の差を検定対象とし、「対応のある標本データ」の検定方法を選ぶ。
なお、パラメトリック検定では、検定に使用する統計量の多くが(表1−1)、推定に使用する統計量に帰無仮説を反映した統計量になっていることが分かる。

(表1−1)パラメトリック検定(parametric test) (1/2)

検定対象	正規分布以外の 検定対象の前提条件	推定に使用する統計量(別途資料「統計的推定の手順」を参照)	帰無仮説	検定に使用する統計量
母平均 μ	母分散 σ^2 = 既知	① $(\bar{X}-\mu)/(\sigma/n^{1/2})$ ～ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$ $\bar{X}$:標本平均、n:サンプルサイズ	μ = 特定の値	$(\bar{X}-\mu)/(\sigma/n^{1/2})$ ～ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$
	σ^2 = 未知、n = 大	② $(\bar{X}-\mu)/(S/n^{1/2})$ ～ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$ S:標本分散		$(\bar{X}-\mu)/(S/n^{1/2})$ ～ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$
	σ^2 = 未知、n = 小	③ $(\bar{X}-\mu)/(U/n^{1/2})$ ～ 自由度 $n-1$ の t 分布 U:不偏分散		$(\bar{X}-\mu)/(U/n^{1/2})$ ～ 自由度 $n-1$ の t 分布
母分散 σ^2	μ = 既知	④ $\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\}/\sigma^2$ ～ 自由度 n のカイ二乗分布	σ^2 = 特定の値	$\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\}/\sigma^2$ ～ 自由度 n のカイ二乗分布
	μ = 未知	⑤ $\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\}/\sigma^2$ ～ 自由度 $n-1$ のカイ二乗分布		$\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\}/\sigma^2$ ～ 自由度 $n-1$ のカイ二乗分布
等分散			$\sigma_X^2=\sigma_Y^2$	U_X^2/U_Y^2 ～ 自由度 $(m-1, n-1)$ の F 分布 不偏分散 $U_X^2=\{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})\}/(m-1)$ $U_Y^2=\{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})\}/(n-1)$
母比率 r	n = 大	⑥ $(R-r)/(r(1-r)/n)^{1/2}$ ～ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$ R:標本比率	r = 特定の値	$(R-r)/(r(1-r)/n)^{1/2}$ ～ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$
母平均の差 $\mu_X-\mu_Y$	対応のある標本データ σ_X^2, σ_Y^2 = 既知	⑦ $(\bar{D}-(\mu_X-\mu_Y))/(U/n^{1/2})$ ～ 自由度 $n-1$ の t 分布 $\bar{D}$:標本データの差の平均	$\mu_X=\mu_Y$	スチューデントの t 検定 $\bar{D}/(U/n^{1/2})$ ～ 自由度 $n-1$ の t 分布
	対応のない標本データ σ_X^2, σ_Y^2 = 既知	⑧ $((\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y))/(\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n)^{1/2}$ ～ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$	$\mu_X=\mu_Y$	$(\bar{X}-\bar{Y})/(\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n)^{1/2}$ ～ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$
	対応のない標本データ σ_X^2, σ_Y^2 = 未知(等分散)	⑨ $\{((\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y))/(1/m+1/n)^{1/2}\}/U$ ～ 自由度 $n+m-2$ の t 分布 但し、$U^2=((m-1)U_X^2+(n-1)U_Y^2)/(m+n-2)$		$\{(\bar{X}-\bar{Y})/(1/m+1/n)^{1/2}\}/U$ ～ 自由度 $n+m-2$ の t 分布
	対応のない標本データ σ_X^2, σ_Y^2 = 未知	⑩ $\{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)\}/(U_X^2/m+U_Y^2/n)^{1/2}$ ～ 自由度 f の t 分布 但し、$f=(U_X^2/m+U_Y^2/n)^2/\{(U_X^2/m)^2/(m-1)+(U_Y^2/n)^2/(n-1)\}$ に最も近い整数		ウェルチの t 検定 $(\bar{X}-\bar{Y})/(U_X^2/m+U_Y^2/n)^{1/2}$ ～ 自由度 f の t 分布
相関係数 ρ		$(n-3)^{1/2}(\zeta-\eta)$ ～ 標準正規分布 $N(0, 1^2)$ ζ:標本相関係数をフィッシャーの z 変換した変数 η:母相関係数をフィッシャーの z 変換した変数	$\rho=0$	$\lvert r\rvert(n-2)^{1/2}/(1-r^2)$ ～ 自由度 $n-2$ の t 分布 r:標本データの相関係数

1. 統計的検定の手順(4/4)

(表1−2)パラメトリック検定(parametric test)(2/2)

検定対象	検定対象の前提条件	帰無仮説	検定に使用する統計量
1 因子 3 水準の母平均 (1元配置分散分析)	全体平方和 = 群間平方和 + 郡内平方和 $(S_T = S_A + S_E)$	$\mu_A = \mu_B = \mu_C$	S_A / S_E 〜 自由度 (ϕ_A, ϕ_E) の F 分布 ϕ_T = 全体のデータ数 − 1 , ϕ_A = 水準の数 − 1 ϕ_E = 全体のデータ数 − 水準の数
2 因子複数水準の母平均 (2元配置分散分析)	全体平方和 = 主効果 A の平方和 + 主効果 B の平方和 + 相互効果 A×B の平方和 + 群内平方和 $(S_T = S_A + S_B + S_{A\times B} + S_E)$	$\mu_{A_1} = \mu_{A_2} = \cdots$ $= \mu_{B_1} = \mu_{B_2} = \cdots$	S_A / S_E 〜 自由度 (ϕ_A, ϕ_E) の F 分布 S_B / S_E 〜 自由度 (ϕ_B, ϕ_E) の F 分布 $S_{A\times B} / S_E$ 〜 自由度 $(\phi_{A\times B}, \phi_E)$ の F 分布 ϕ_T = 全体のデータ数 − 1, ϕ_A = A の水準の数 − 1, ϕ_B = B の水準の数 − 1 $\phi_{A\times b} = \phi_A \times \phi_B$, $\phi_E = \phi_T - (\phi_A + \phi_B + \phi_{A\times B})$
共変量が存在する 2 群(2 標本)の母平均 (共分散分析)	全体平方和 = 群間平方和 + 共変量による調整済み郡内平方和 $(S_T = S_A + S_E)$ 2 群それぞれの直線回帰係数が等しい	共変量を使った調整済み $\mu_1 = \mu_2$	S_A / S_E 〜 自由度 (ϕ_A, ϕ_E) の F 分布 ϕ_T = 全体のデータ数 − 1 , ϕ_E = 全体のデータ数 − 3 , $\phi_A = 2$

(表2)ノンパラメトリック検定(non-parametric test)

検定対象	検定対象の前提条件	帰無仮説	検定に使用する統計量
適合度	n = 大	対象の度数分布 = 特定の度数分布	$\sum_{i=1}^{n} (x_i - N p_i)^2 / (N p_i)$ 〜 自由度 n − 1 のカイ二乗分布 N :全体のデータ数、p_i :特定のカテゴリーに属する確率
独立性	n = 大	対象の分布 = 周辺分布の積 (欄外の注を参照)	$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - a_i b_j / N)^2 / (a_i b_j / N)$ 〜 自由度 (m − 1) (n − 1) のカイ二乗分布 X_{ij} :因子区分が A_i でかつ B_j に属するデータ、a_i :因子区分 A_i のデータ数、b_j :因子区分 B_j のデータ数
代表値	対応のある標本データ　n = 大	順位和分布の差の位置母数 = 0	ウィルコクソンの符号付順位検定 $(W - E[W]) / (V[W])^{1/2}$ 〜 標準正規分布 $N(0, 1^2)$ W: 対応する 2 標本のデータの差を取って順位が付けられたとき、差がプラスの順位の総和
	対応のない標本データ　n = 大	順位和分布の位置母数が等しい	ウィルコクソンの順位和検定 $(W - E[W]) / (V[W])^{1/2}$ 〜 標準正規分布 $N(0, 1^2)$ W: 2 標本を混合して順位を付けたとき、片側の標本に付けられた順位の総和

(注)2つの事象の同時確率分布 = 2つの事象の周辺確率の積の分布　で表される場合、2つの周辺確率の分布は独立しているという。

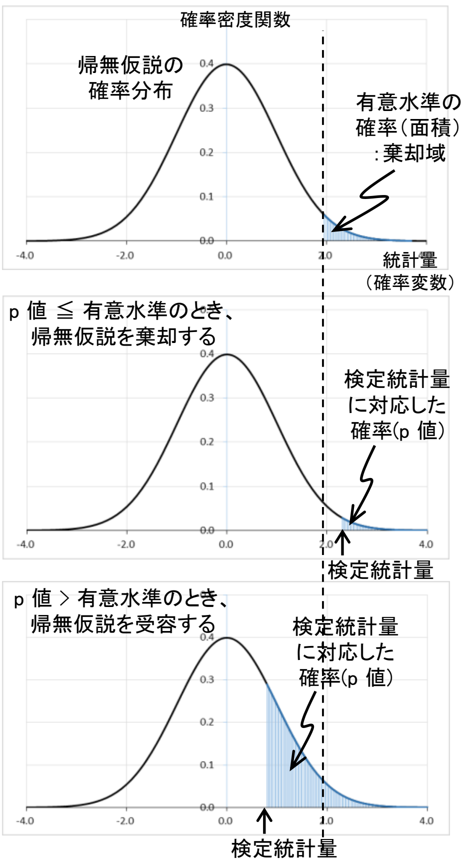
(参考)同時確率分布　:　2つの事象が同時に成立する場合の確率の分布
周辺確率分布　:　片方の事象の成立状況は無視して注目する事象を絞り、注目した事象が成立する確率の分布
条件付確率分布　:　片方の事象が特定の成立条件を満たすときに、注目した事象が成立する確率の分布

2. 帰無仮説の棄却（p 値と有意水準）

帰無仮説が成立するもとではまず起こらないであろうという事象の発生確率を有意水準として予め決めておく。p 値は帰無仮説が成立すると仮定した場合の事象の発生確率である（p 値は検定統計量という実現値に対応した確率になる）。検定では2つの確率の値、つまり、有意水準と p 値を比較する。p 値が有意水準より小さな確率の値になったとき、極めて稀なことが起きた、それは p 値を算出する前提の帰無仮説が誤っていたからだと判断すべきで、対立仮説を採択するのが望ましい、というのが帰無仮説の棄却である（図4）。このように、仮説検定の手順で「肝」となるのは、「帰無仮説の棄却」である。極言すれば、検定とは帰無仮説が正しくないことを確認する作業である。そして、対立仮説が正しいとき、帰無仮説を棄却し対立仮説を採択するという行為は対立仮説の正しさを確認（検出）することになり、このときの確率は検出力と言われる。

なお、（付録5）に示すように、p 値は特定の統計モデルが矛盾する程度を示す指標の一つであると広く捉えるべきで、帰無仮説が誤っている場合だけでなく、例えば、検定で使用するデータの採取方法に問題がある場合の影響も受ける。また、統計検定量が従う確率分布の式を見て分かるように（後述するように）、p 値はサンプルサイズの大きさの影響を受ける。つまり、サンプル数が多くなると p 値は小さくなり、帰無仮説が棄却される傾向が強くなることにも注意しなくてはならない。

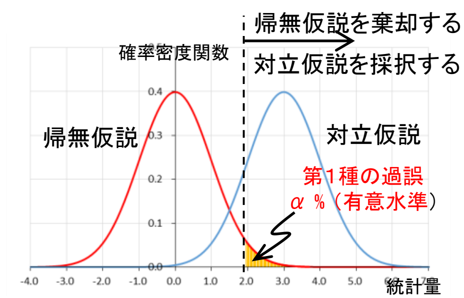
また、（表3）に仮説検定の場合分けを示す。仮説検定では、（表3）にあるように、②と③が正しい判断で、①第1種の過誤と④第2種の過誤と言う「過ち」を犯す危険があることに注意が必要である。

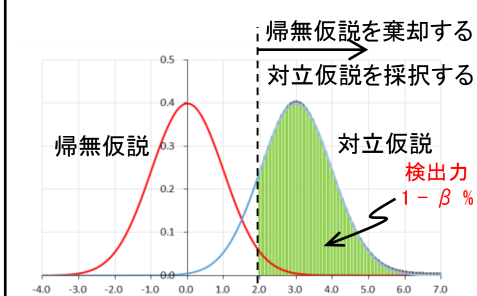


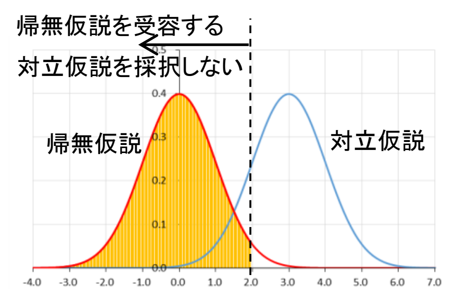
（図4）帰無仮説の棄却と受容（片側検定のとき）

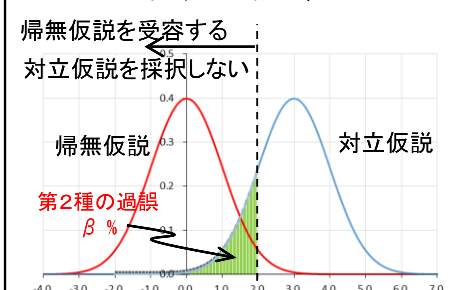
（表3）仮説検定の場合分け

		事実：帰無仮説が正しい	事実：対立仮説が正しい
検定結果	帰無仮説を棄却する（対立仮説を採択する）	① 帰無仮説が正しいのに、帰無仮説を棄却して、対立仮説を採択する 第1種の過誤： α ％（有意水準）	③ 対立仮説が正しいとき、帰無仮説を棄却して、対立仮説を採択する 検出力： 1－β ％
検定結果	帰無仮説を受容する（対立仮説を採択しない）	② 帰無仮説が正しいとき、帰無仮説を受容する	④ 対立仮説が正しいのに、帰無仮説を棄却せず、帰無仮説を受容する 第2種の過誤： β ％









3. サンプルサイズ、有意差、検出力、効果量の関係(事前分析と事後分析)

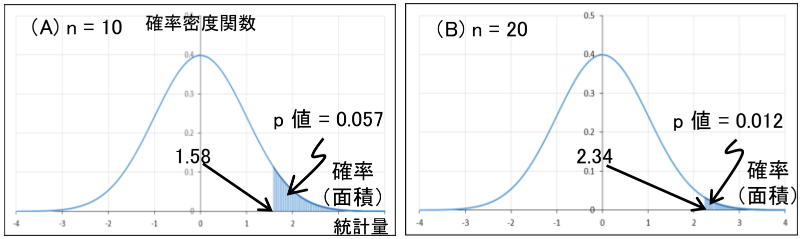
仮説検定を行う前にサンプルサイズを決める必要がある。このプロセスを事前分析という。
また、仮説検定を実施した後には、検定品質として検出力と効果量を確認しておくのが望ましい。このプロセスを事後分析という。

1)事前分析(サンプルサイズを決める)

サンプルサイズは、有意差(α)と検出力($1-\beta$)と効果量(Δ)を決めれば求めることができる(付録6)。通常、$\alpha = 0.05$, $1-\beta = 0.8$ が使われ、Δ は事前調査のデータとか先行事例のデータをもとに設定される。

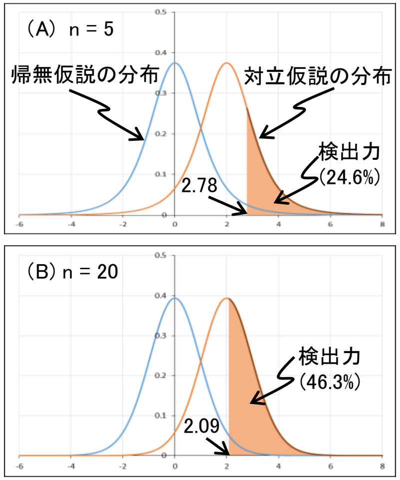
- 有意差 significant difference(α) : 帰無仮説が正しいとき帰無仮説を棄却する確率(α は第1の過誤) $\alpha = 0.05$ (5 %) がよく使われる。
- 検出力 power($1-\beta$) : 対立仮説が正しいとき帰無仮説を棄却する確率(β は第2の過誤) α と $1-\beta$ はトレードオフの関係にある。 $1-\beta = 0.8$ (80 %) がよく使われる。
- 効果量 effect size(Δ) : 平均差を標準偏差に対する大きさとして表す。

①サンプルサイズが大きくなると帰無仮説が棄却されやすくなる。有意差を生じやすくなる(図5)。
例えば分散が既知の場合の母平均の検定で使用される検定統計量は、
$T = (\bar{X} - \mu) / (\sigma / n^{1/2})$ で表され、標準正規分布に従う(5-1. 参照)。
この式から分かるように、サンプルサイズ n を大きくすると、検定統計量 T の値は大きくなり、その発生確率である p 値は小さくなる。つまり帰無仮説が棄却されやすくなる。
(図5)は、母分散 $\sigma^2 = 1$, 標本平均 $\bar{X} = 0.5$, 帰無仮説を母平均 μ = 特定の値(ここでは、0)としたときの帰無仮説の確率分布である。
(A)はサンプルサイズ n = 10 のときで、T = 1.58, p 値 = NORM.DIST(1.58,0,1,true) = 0.057
(B)はサンプルサイズ n = 20 のときで、T = 2.34, p 値 = NORM.DIST(2.34,0,1,true) = 0.012
サンプルサイズが大きくなると p 値が小さくなることを確認できる。

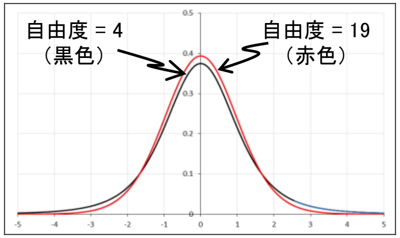


(図5)サンプルサイズと検定統計量

②サンプルサイズが大きくなると検出力が大きくなる(図6)。
例えば、母分散が既知で対応のある標本の平均の差の統計検定量は、
$T = \bar{D} / (U / n^{1/2})$ ($\bar{D}$ は対応するデータの差の平均、U は不偏分散)は、自由度 n − 1 の t 分布に従う(9-1. 参照)。
この式から分かるように、サンプルサイズ n を大きくすると①と同じく検定統計量 T の値は大きくなり、また自由度 n − 1 も大きくなるので t 分布の形が少しシャープになる(図7)。
(図6)は不偏分散 $U^2 = 1$、帰無仮説を差の平均が 0 の t 分布、対立仮説を平均の差が 2 の t 分布であるとする。また、$\alpha = 0.05$ (片側で、0.025) とする。
(A)はサンプルサイズ n = 5 のときの t 分布、$t_{\alpha/2} = t_{0.025}$ = T = T.INV(1− 0.25,5−1) = 2.78
(B)はサンプルサイズ n =20 のときの t 分布、$t_{\alpha/2} = t_{0.025}$ = T = T.INV(1− 0.25,20−1) = 2.09
帰無仮説の α が対立仮説の $1-\beta$ に相当することをもとに、検出力を図示する。

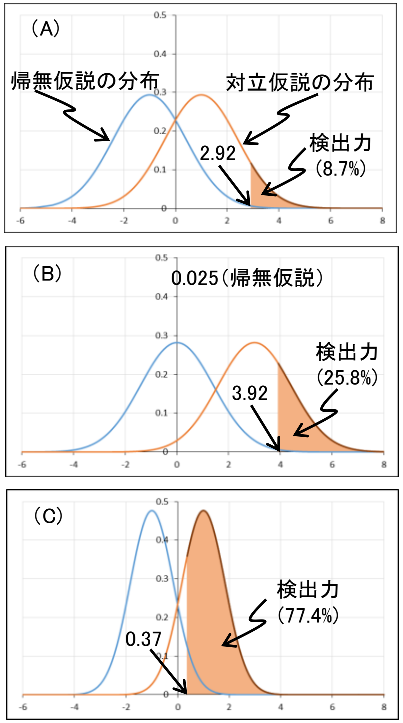


(図6)サンプルサイズと検出力



(図7)自由度と t 分布

③効果量が大きくなると検出力が大きくなる(図8)。
効果量 Δ は、平均の差が標準偏差の何倍あるかを示す無次元化された統計量であり、
Δ = 平均の差 / 標準偏差 で定義される。 なお、効果量はサンプルサイズの影響を受けない。
(A)は平均の差 = 2, 標準偏差 = $2^{1/2}$, よって、$\Delta = 2 / 2^{1/2}$
(B)は平均の差 = 3, 標準偏差 = $2^{1/2}$, よって、$\Delta = 3 / 2^{1/2} > 2 / 2^{1/2}$
(C)は平均の差 = 2, 標準偏差 = $0.7^{1/2}$, よって、$\Delta = 2 / 0.7^{1/2} > 2 / 2^{1/2}$
(A)に対する(B)のように平均の差が大きいほど、また、(A)に対する(C)のように標準偏差が小さいほど効果量は大きくなり、検出力も大きくなる。



(図8)効果量と検出力
(帰無仮説の α = 2.5%)

2)事後分析(検定性能の確認)
検定を行った後で、検出力と効果量を確認することによって、検定性能を確認しておく。

なお、(付録6)には、検定統計量が標準正規分布に従う場合を例にサンプルサイズを求める方法と各種の検定に必要とされるサンプルサイズを計算するフリーソフトの活用方法を載せておく。

4．正規性の確認（Q-Qプロット）

パラメトリック検定では、標本データが正規分布に従うこと（母集団が正規分布であること）を前提にしている。そこで、検定を行う前に標本データが正規分布に従っているかどうかを確認しておく必要がある。標本データの正規性を確認する方法には、1）ヒストグラムを描いて正規分布に近い分布の形をしているかどうかを確認する方法　2）データの分位点（Quantile）を使用して描くQ-Q プロットが直線近似できるか否かで確認する方法　3）正規性の検定を行う方法（シャピロ・ウィルク検定など）が提案されている。ここでは、Q-Qプロット（Quantile-Quantile Plot）と呼ばれる方法を取り上げる。

Q-Q プロットを使用した正規性の確認手順を示す。

例えば、8 分位点とは値が小さい順にデータを並べたときデータ数を 8 等分する区切りの値である。いずれの区分もデータ数の割合は 1/8 = 12..5 % である。それぞれの 8 − 1 = 7 個の分位点より小さな値を持つデータ数の割合は、それぞれ、12.5 %， 12.5 + 12.5 = 25 %， ・・・ , 12.5 + 12.5 + ・・・ + 12.5 = 87.5 % である。この割合は、確率分布で考えれば、確率 0.125, 0.25, ・・・, 0.875 になる（図9）。

（1）全ての標本データをデータの値が小さい順に並び替え、順番を付ける。

（2）並び替えた全ての標本データが分位点（標本データの分位点）であると捉える。

（3）並び替えた順番を順序変数（確率変数）であると捉えて、その確率を求める。
データ数を n， 順番を k（但し、k = 1, ・・・, n）とすれば、並び替えた順番の確率は (k − 0.5) ／ n となる。

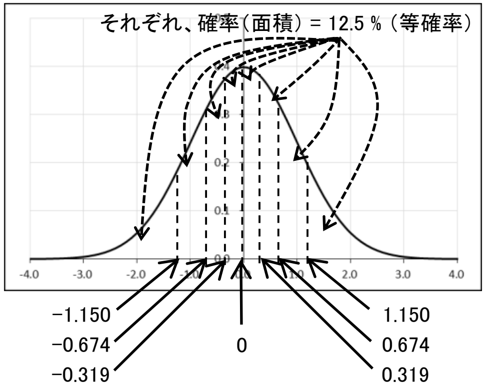
（4）この確率が標本データから得られる平均と分散を持つ正規分布に従うと考え、この確率に対応した確率変数の値を求め、この値を正規分布の理論分位点とする。

（5）標本データの分位点と正規分布の理論分位点をプロットする。これが、Q-Q プロットである。

（6）そして、このプロットが直線近似できるとき、標本データは正規分布に従うと見なすことができる。

（例）

正規分布に従う 200 個の標本データ（表4）の（a）の Q-Q プロットを（図10）に示す。この場合は、直線近似できている。一方、自由度 10 のカイ二乗分布に従う 200 個の標本データ（表4）の（b）の Q-Q プロットを（図11）に示す。この場合は、直線近似できないことが確認できる。



（図9）標準正規分布の8 分位点

（表4）Q-Q プロットのためのデータ加工

（a） 標本データが正規分布のとき

標本データ	順位	確率	理論分位点
0.895	158	0.788	0.920
1.008	165	0.823	1.046
-1.108	24	0.118	-1.042
0.161	101	0.503	0.138
0.304	110	0.548	0.250
-1.022	26	0.128	-0.993
1.616	188	0.938	1.648
-0.770	36	0.178	-0.782
1.221	181	0.903	1.412
・・・	・・・	・・・	・・・

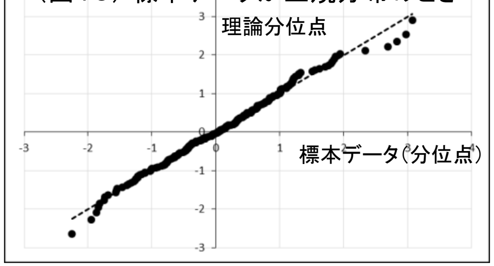
平均 = 0.132， 分散 = 0.988

（b） 標本データがカイ二乗分布のとき

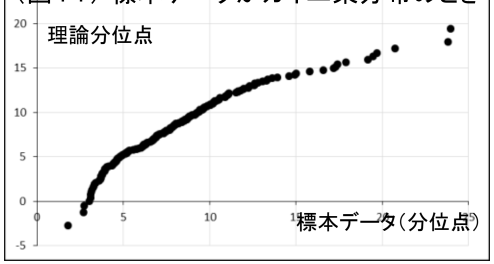
標本データ	順位	確率	理論分位点
6.164	61	0.303	6.303
10.911	162	0.808	11.795
9.670	142	0.708	10.517
6.877	78	0.388	7.220
9.388	135	0.673	10.123
5.108	45	0.223	5.326
7.039	83	0.413	7.476
17.307	192	0.958	15.179
3.316	11	0.053	1.928
・・・	・・・	・・・	・・・

平均 = 8.352， 分散 = 3.963

（図10） 標本データが正規分布のとき



（図11） 標本データがカイ二乗分布のとき



5-1. 母平均の検定（1標本）: 母集団分布が既知

母集団の確率分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ で、母分散 σ^2 が既知のとき、母平均 μ が特定の値であるかどうかを検定する。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母平均 = μ（特定の値）、対立仮説は母平均 $\neq$ μ（特定の値）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（表1-1）の ① に示す推定に使用する統計量に、（1）の帰無仮説 $\mu = \mu$（特定の値）を反映すれば、検定のための統計量 T（式1）が得られる。

$T = (\overline{X} - \mu\text{（特定の値）}) / (\sigma / n^{1/2})$ ・・・ （式1）

但し、標本平均 $\overline{X} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) / n$

（3）（式1）で表される統計量（確率変数）T は、推定統計量と同じく、標準正規分布に従う。

（4）（式1）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

（例）

（表5）に、10 個の標本データを示す。母分散 $\sigma^2 = 17$ が既知である。 ここで、母平均 $\mu = 73$（特定の値）であるとして、母平均の検定をする。
つまり、帰無仮説： 母平均 $\mu = 73$，対立仮説：母平均 $\mu \neq 73$ であるとする。

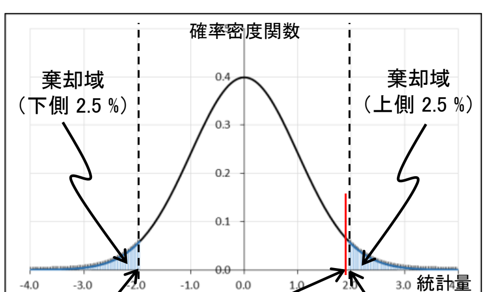
（表5）標本データ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\overline{X}$
X_i	70	77	76	79	85	75	78	66	68	82	75.5

（式1）に、帰無仮説の条件である $\mu = 73$ と、既知の分散 $\sigma^2 = 17$ と $\overline{X} = 75.5$ 代入して、検定統計量 T を求める。

$T = (75.5 - 73) / (17/10)^{1/2} = 1.917$

標準正規分布の両側 5 % 有意水準で、（下側棄却域 2.5 % の統計量 = − 1.960）< 1.917 <（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 1.960）
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = 1 − NORMDIST (1.917, 0, 1, true) = 0.0276 > 0.025（上側棄却域）
帰無仮説を前提とした統計量は棄却域に入っていない。よって、帰無仮説を棄却できず、受容することになる。
つまり、母平均 μ は 73 であるという判断を棄却することはできず、受容することになる（図12）。



− 1.960

1.917
帰無仮説を
前提とした統計量

1.960
有意差（上側 2.5 %）に対応した統計量
EXCEL 関数 NORMINV (1 − 0.025, 0, 1) = 1.960

（図12）標準正規分布の検定

5-2. 母平均の検定（1標本）: 母集団分布が未知

母集団の確率分布が未知のとき、母平均 μ が特定の値であるかどうかを検定する。但し、標本サイズは十分に大きいとき（例えば、n ≧ 30 場合）を考える。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母平均 = μ（特定の値）、対立仮説は母平均 ≠ μ（特定の値）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（表1-1）の ② に示す推定に使用する統計量に、（1）の帰無仮説 $\mu = \mu$（特定の値）を反映すれば、検定のための統計量 T（式2）が得られる。

$T = (\bar{X} - \mu(\text{特定の値})) / (S / n^{1/2})$ ・・・（式2）

但し、標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$， 標本分散 $S^2 = (\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2) / n$

（3）（式2）で表される統計量（確率変数）T は、推定統計量と同じく、標準正規分布に従う。

（4）（式2）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

（例）

（表6）に、30 個の標本データを示す。ここで、母平均 μ = 73（特定の値）であるとして、母平均の検定をする。
つまり、帰無仮説: 母平均 μ = 73， 対立仮説: 母平均 μ ≠ 73 であるとする。

（表6）標本データ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
X_i	70	77	76	79	85	75	78	66	68	82	65	70	81	78	73	
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	$\bar{X}$
X_i	75	69	83	73	77	80	82	74	79	73	70	69	80	82	74	75.4

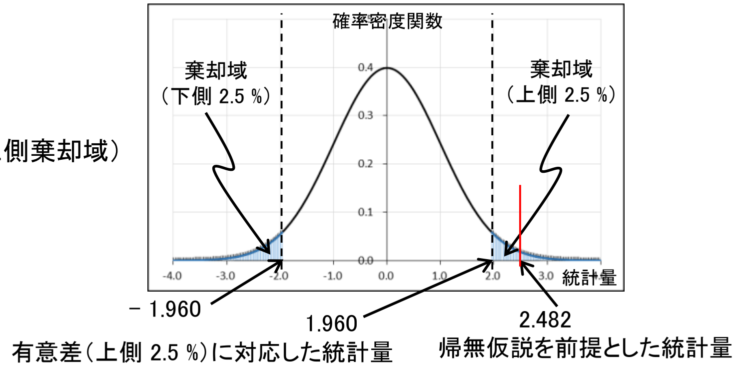
まず、標本分散 S^2 を求める。

$S^2 = \{ (70 - 75.4)^2 + (77 - 75.4)^2 + \cdots + (74 - 75.4)^2 \} / 10 = 28.0$

（式2）に、帰無仮説の条件である μ = 73 と、標本分散 S^2 = 28.0 と、標本平均 $\bar{X}$ = 75.4 を代入して、検定統計量 T を求める。

$T = (75.4 - 73) / (28.0/10)^{1/2} = 2.482$

標準正規分布の両側 5 % 有意水準で、（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 1.960）< 2.482
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = 1 − NORMDIST (2.482, 0, 1, true) = 0.0065 < 0.025（上側棄却域）
帰無仮説を前提とした統計量は棄却域に入る。
よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。
つまり、母平均 μ は 73 ではないという判断が採択されることになる（図13）。



（図13）標準正規分布の検定

5-3．母平均の検定（1標本）：母分散が未知

母集団の確率分布が正規分布　N（μ，σ^2）で、母分散 σ^2 が未知のとき、母平均 μ が特定の値であるかどうかを検定する。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母平均 = μ（特定の値）、対立仮説は母平均 ≠ μ（特定の値）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（表1）の ③ に示す推定に使用する統計量に、（1）の帰無仮説 $\mu = \mu$（特定の値）を反映すれば、検定のための統計量 T（式3）が得られる。

$T = (\overline{X} - \mu(\text{特定の値})) / (U / n^{1/2})$　　・・・（式3）

但し、標本平均 $\overline{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$，不偏分散 $U^2 = (\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2) / (n-1)$

（3）（式3）で表される統計量（確率変数）T は、推定統計量と同じく、自由度 n − 1 の t 分布に従う。

（4）（式3）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

（注）t 検定は正規分布を前提しているが、どんな確率分布であっても、標本サイズが大きくなると標本平均は正規分布に近づく（中心極限定理）ので、標本サイズが大きければ、正規分布でない確率分布であっても t 検定を使用することができる（これを、t 検定は正規性に対してロバストであるという）。

（例）

（表7）に、10 個の標本データを示す。母分散 σ^2 は未知である。 ここで、母平均 μ = 73（特定の値）であるとして、母平均の検定をする。
つまり、帰無仮説： 母平均 μ = 73，対立仮説：母平均 μ ≠ 73 であるとする。

（表7）標本データ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\overline{X}$
X_i	70	77	76	79	85	75	78	66	68	82	75.5

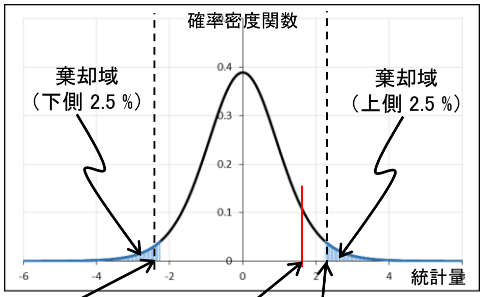
まず、不偏分散 U^2 を求める。

$U^2 = \{(70 - 75.5)^2 + (77 - 75.5)^2 + \cdots + (82 - 75.5)^2\} / (10 - 1) = 36.7$

（式3）に、帰無仮説の条件である μ = 73 と、不偏分散 U^2 = 36.7 と、標本平均 $\overline{X}$ = 75.5 を代入して、検定統計量 T を求める。

$T = (75.5 - 73) / (36.7 / 10)^{1/2} = 1.305$

自由度 9 の t 分布の両側 5 % 有意水準で、
（下側棄却域 2.5 % の統計量 = − 2.262）< 1.305 <（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 2.262）
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = TDIST (1.305, 9, 1) = 0.112 > 0.025（上側棄却域）
帰無仮説を前提とした統計量は棄却域に入っていない。
よって、帰無仮説を棄却できず、受容することになる。
つまり、母平均 μ は、73 であるという判断を棄却することはできず、
受容することになる（図14）。



− 2.262

1.305
帰無仮説を前提とした統計量

2.262
有意差（上側 2.5 %）に対応した統計量
Excel 関数 T.INV (1 − 0.025, 9) =2.262

（図14）自由度 9 の t 分布の検定

6-1．母分散の検定（1標本）：母平均が既知

母集団の確率分布が正規分布　N（μ，σ^2）で、母平均　μ　が既知のとき、母分散　σ^2　が特定の値であるかどうかを検定する。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母分散 = σ^2（特定の値）、対立仮説は母分散 ≠ σ^2（特定の値）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（表1）の ④ に示す推定に使用する統計量に、（1）の帰無仮説　$\sigma^2 = \sigma^2$（特定の値）を反映すれば、検定のための統計量 T（式4）が得られる。

$$T = \{ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \} / (\sigma^2(\text{特定の値})) \quad \cdots \quad (\text{式4})$$

（3）（式4）で表される統計量（確率変数）T は、推定統計量と同じく、自由度 n の カイ二乗分布に従う。

（4）（式4）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

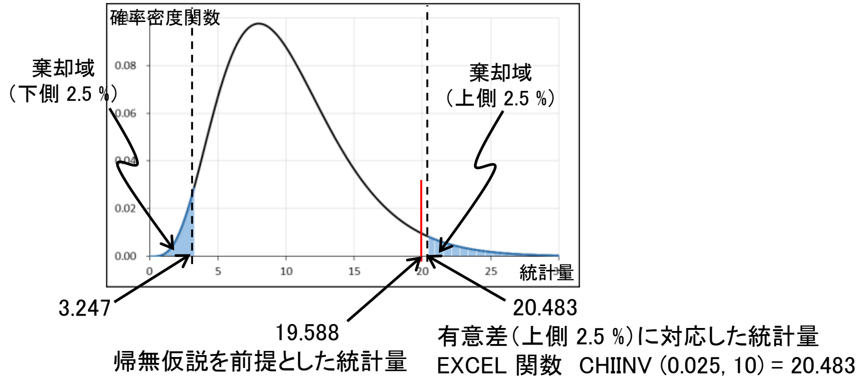
（例）

（表8）に、10 個の標本データを示す。母平均　μ = 75 は既知である。 ここで、母分散　σ^2 が 17 であるとして、母分散の検定をする。
つまり、帰無仮説：　母分散　σ^2 = 17，対立仮説：母分散　σ^2 ≠ 17 であるとする。

（表8）標本データ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{X}$
X_i	70	77	76	79	85	75	78	66	68	82	75.5

（式4)に、帰無仮説の条件である　σ^2 = 17 と、母平均　μ = 75 を代入して、検定統計量 T を求める。
$T = \{ (70 - 75)^2 + (77 - 75)^2 + \cdots + (82 - 75)^2 \} / 17 = 19.588$
自由度 10 のカイ二乗分布の両側 5 % 有意水準で、（下側棄却域 2.5 % の統計量 = 3.247) < 19.588 <（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 20.483）
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = CHIDIST (19.588, 10) = 0.033 > 0.025（上側棄却域）
帰無仮説を前提とした統計量は棄却域に入っていない。よって、帰無仮説を棄却できず、受容することになる。
つまり、母分散　σ^2 は、17 であるという仮説を棄却することはできず、受容することになる（図15）。



（図15）自由度 10 のカイ二乗分布の検定

6-2. 母分散の検定（1標本）： 母平均が未知

母集団の確率分布が正規分布　N（μ, σ^2) で、母平均 μ が既知のとき、母分散 σ^2 が特定の値であるかどうかを検定する。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母分散 = σ^2（特定の値）、対立仮説は母分散 ≠ σ^2（特定の値）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（表1）の ⑤ に示す推定に使用する統計量に、（1）の帰無仮説 σ^2 = σ^2（特定の値）を反映すれば、検定のための統計量 T（式5）が得られる。

$$T = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 / \sigma^2) \quad \cdots \quad （式5）$$

但し、標本平均 $\overline{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$

（3）（式5）で表される統計量（確率変数）T は、推定統計量と同じく、自由度 n − 1 の カイ二乗分布に従う。

（4）（式5)を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

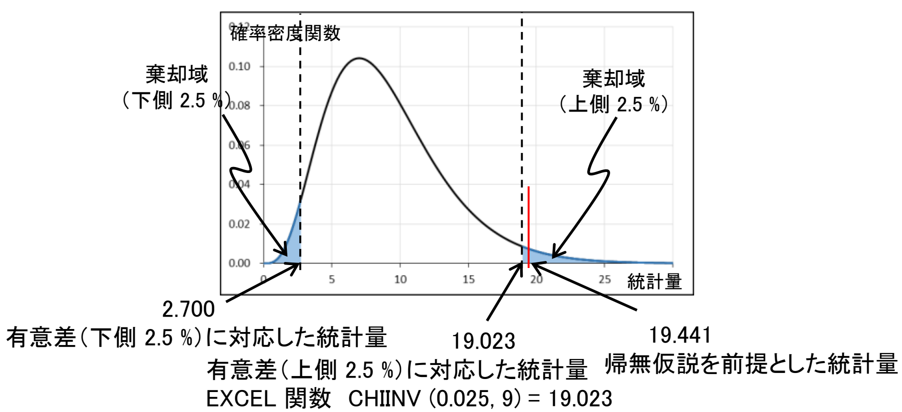
（例）

（表9）に、10 個の標本データを示す。母平均 μ は未知である。 ここで、母分散 σ^2 が 17 であるとして、母分散の検定をする。
つまり、帰無仮説： 母分散 σ^2 = 17， 対立仮説： 母分散 σ^2 ≠ 17 であるとする。

（表9）標本データ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{X}$
X_i	70	77	76	79	85	75	78	66	68	82	75.5

（式E5に、帰無仮説の条件である σ^2 = 17 と、標本平均 μ = 75.5 を代入して、検定統計量 T を求める。
T = { (70 − 75.5)^2 + (77 − 75.5)^2 + ・・・ + (82 − 75.5)^2 } / 17 = 19.441
自由度 9 の カイ二乗分布の両側 5 % 有意水準で、（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 19.023) < 19.441
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = CHIDIST (19.441, 9) = 0.022 < 0.025 （上側棄却域）
帰無仮説を前提とした統計量は棄却域に入る。よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。
つまり、母分散 σ^2 は、17 ではない、という対立仮説が採択されることになる（図16）。



（図16）自由度 9 のカイ二乗分布の検定

7．母比率の検定（1標本）

母集団の確率分布が正規分布　N（μ，σ^2）のとき、母比率 r が特定の値であるかどうかを検定する。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母比率 = r（特定の値）、対立仮説は母比率 ≠ r（特定の値）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（表1）の ⑥ に示す推定に使用する統計量に、（1）の帰無仮説 r = r（特定の値）を反映すれば、検定のための統計量 T（式6）が得られる。

$$T = (R - r(\text{特定の値})) / (r(\text{特定の値})\,(1 - r(\text{特定の値})) / n)^{1/2} \quad \cdots \quad (\text{式6})$$

但し、標本比率 R = 標本平均 = $\overline{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$

（3）（式6）で表される統計量（確率変数）T は、推定統計量と同じく、標準正規分布に従う。

（4）（式6）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

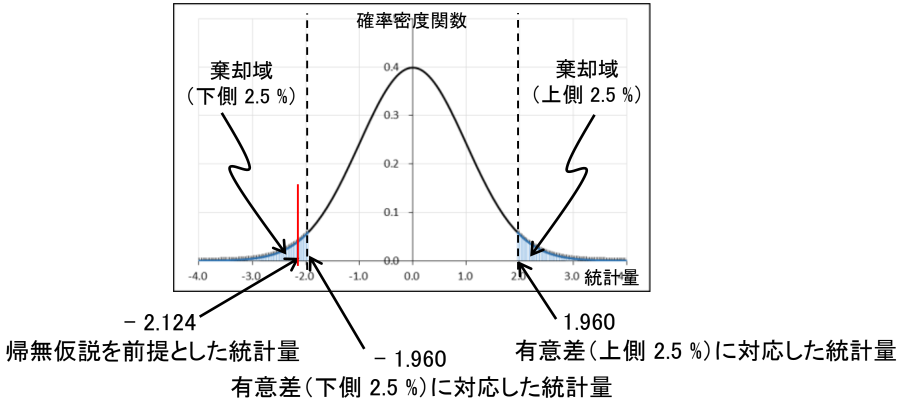
（例）

選挙の投票率調査を 500 人に対して行ったところ、381 人が投票していた。 ここで、投票率（母比率） r が 0.80 であるとして（投票率）母比率の検定をする。
つまり、帰無仮説： 母比率 r = 0.8， 対立仮説：母比率 r ≠ 0.8 であるとする。

（式6）に、帰無仮説の条件である r = 0.80 と、標本データから得られた標本比率 R = 381 ／ 500 = 0.762 を代入して、検定統計量 T を求める。

$T = (0.762 - 0.8) / \{ 0.8\,(1 - 0.8) / 500 \}^{1/2} = -2.124$

標準正規分布の両側 5 % 有意水準で、−2.124 <（下側棄却域 2.5 % の統計量 = − 1.960）
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = NORM.DIST（−2.124, 0, 1, true）= 0.0168 < 0.025（下側棄却域）
帰無仮説を前提とした統計量は棄却域に入る。よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。
つまり、母分散 r は、0.8 ではない、という対立仮説が採択されることになる（図17）。



（図17）標準正規分布の検定

8. 等分散の検定（2標本）

母分散が未知で対応のない2つの正規分布の標本データの平均の差を検定する場合、等分散であるか否かによって検定方法が違ってくる（等しい場合は9-3、等しくない場合は9-4）。そこで、2つの正規分布 $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ と $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ の母分散が等しいかどうかを事前に判断するために、検定が行われる。
（注）この等分散検定の後に差の検定をするということは多重検定（後述）を行うことになり好ましくない。また、等分散であろうがなかろうが、等分散でないことを前提とする検定を行えばいいことになる。このような背景があって、等分散の検定の必要性はあまりない。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母分散 $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$（等しい）、対立仮説は母分散 $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$（等しくない）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）2つの正規分布の母分散が等しいという帰無仮説のもとでは、（付録12）に示すように、不偏分散の比である統計量 T は F 分布に従う（付録11）。

$T = U_X^2 / U_Y^2$ ・・・（式7）

但し、不偏分散 $U_X^2 = \{ \sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X}) \} / (m-1)$，$U_Y^2 = \{ \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y}) \} / (n-1)$

（3）（式7）で表される統計量（確率変数）T は、自由度 (m − 1, n − 1) の F 分布に従う。

（4）（式7）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

（例）

2つの母集団の母分散が等しいかどうかの検定を行う。

例えば、（表10）の種目 A と B の母分散が等しいかどうかの検定をする。（式7）に、（表10）に示す不偏分散の値を代入する。

$T = 33.13 / 30.28 = 1.094$

自由度 (7, 8) の F 分布の両側 5 % 有意水準で、（下側棄却域 2.5 % の統計量 = 0.204）< 1.094 <（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 4.529）

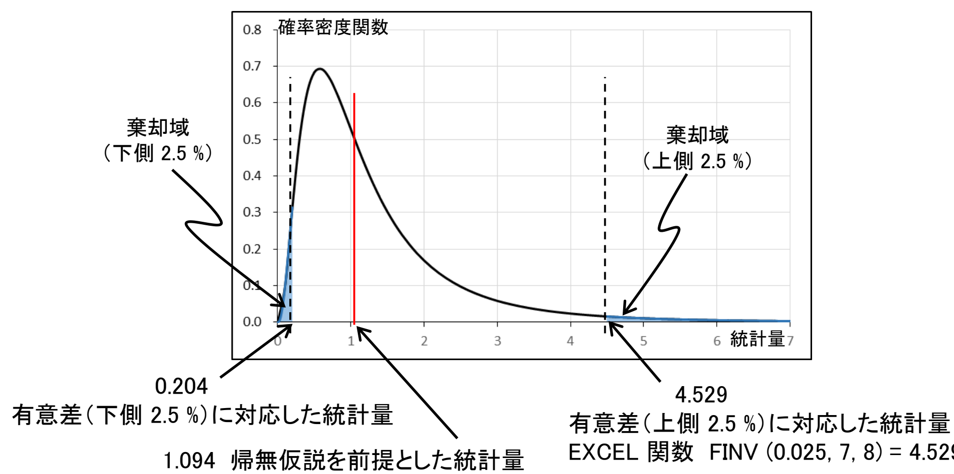
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = FDIST (1.094, 7, 8) = 0.446 > 0.025（下側棄却域）

帰無仮説を前提とした統計量は棄却域に入っていない。 よって、帰無仮説を棄却できず、受容することになる。

つまり、2つの母分散に差がないという仮説を棄却することはできず、差があるという仮説を受容することになる（図18）。

（表10）2標本データ

選手名	種目A	選手名	種目B
A1	70	B1	65
A2	77	B2	70
A3	75	B3	60
A4	79	B4	69
A5	85	B5	67
A6	75	B6	68
A7	78	B7	74
A8	66	B8	78
		B9	75
平均	75.63	平均	69.56
不偏分散	33.13	不偏分散	30.28



（図18）自由度 (7, 8) の F 分布の検定

9-1．平均の差の検定（2標本）：対応あり、母分散既知

母分散 σ_X^2 が既知の正規分布 N（μ_X, σ_X^2）に従う母集団の標本データ $_{Xi}$ と、母分散 σ_Y^2 が既知の正規分布 N（μ_Y, σ_Y^2）に従う母集団の標本データ Y_i に対応がある場合に、2つの母集団の母平均の間に差があるかどうかを検定する。対応がある場合とは、標本データ (X_i, Y_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をセットで扱うことができる場合をいう。例えば、商品の改定前後の比較評価をご来店のお客様ごとに実施し、改定の効果を評価する場合、比較データは対応のあるデータになる。一方、改定前の評価を複数人で行い、改定後の評価を別の複数人で行うような場合は比較データは対応のないデータになる。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母平均 $\mu_X = \mu_Y$（差がない）、対立仮説は母平均 $\mu_X \neq \mu_Y$（差がある）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（表1）の ⑦ に示す推定に使用する統計量に、（1）の帰無仮説 $\mu_X = \mu_Y$ を反映すれば、検定のための統計量 T（式8）が得られる。

$T = (\overline{D} \ / \ (U \ / \ n^{1/2})$ ・・・ （式8）

但し、対応するデータの差 $D_i = X_i - Y_i$, D_i の平均 $\overline{D} = (\sum_{i=1}^{n} D_i) \ / \ n$, D_i の不偏分散 $U^2 = (\sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2) \ / \ (n - 1)$

（3）（式8）で表される統計量（確率変数）T は、推定統計量と同じく、自由度 n − 1 の t 分布に従う。

（4）（式8）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

（例）

2つの母集団（正規分布）の母平均に差があるかどうかを検定する。
例えば、競技者が 5 人で、競技種目 A と B の得点がそれぞれ 10 点満点（表11）であるとき、競技種目 A と B の平均得点に差があるかどうかを検定する。
選手ごとに種目A と種目 B の得点がセットになっているので、対応があるデータのケースになる。

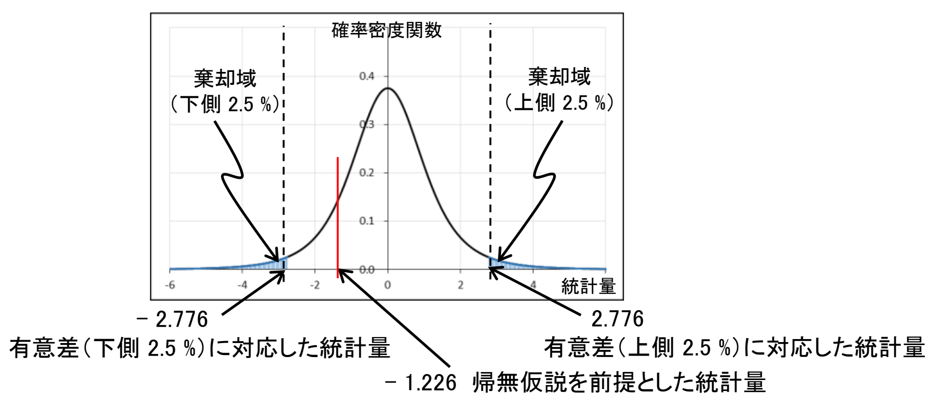
帰無仮説である、母平均 $\mu_X = \mu_Y$ と差の平均値 $\overline{D} = -0.48$, そして不偏分散 $U^2 = 0.767$ を（式8)に代入して、統計量 T を求める。

$T = -0.48 \ / \ (0.767 \ / \ 5)^{1/2} = -1.226$

自由度 4 の t 分布の両側 5 % 有意水準で、（下側棄却域 2.5 % の統計量 = − 2.776) < 1.226 <（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 2.776)
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = T.DIST (− 1.226, 5−1, 2) = 0.144 > 0.025 (下側棄却域)
帰無仮説を前提とした統計量は棄却域に入っていない。 よって、帰無仮説は棄却できず、受容することになる。
つまり、2つの母平均に差がないという仮説を棄却することはできず、差があるという仮説を受容することになる（図19）。

（表11）2標本データ

選手名	種目A	種目B	種目間の差
A	9.5	8.9	0.6
B	9.0	9.3	− 0.3
C	6.4	8.2	− 1.8
D	7.5	7.7	− 0.2
E	8.3	9.0	− 0.7
平均	8.14	8,62	− 0.48
不偏分散	1.513	0.427	0.767



（図19）自由度 4 の t 分布の検定

9-2. 平均の差の検定（2標本）：対応なし、母分散既知

母分散 σ_X^2 が既知の正規分布 N（μ_X, σ_X^2) に従う母集団の標本データ X_i と、母分散 σ_Y^2 が既知の正規分布 N（μ_Y, σ_Y^2) に従う母集団の標本データ Y_j に対応がない場合に、2つの母集団の母平均の間に差があるかどうかを検定する。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母平均 $\mu_X = \mu_Y$（差がない）、対立仮説は母平均 $\mu_X \neq \mu_Y$（差がある）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（表1）の ⑧ に示す推定に使用する統計量に、（1）の帰無仮説 $\mu_X = \mu_Y$ を反映すれば、検定のための統計量 T（式9）が得られる。

$T = (\bar{X} - \bar{Y}) / (\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2}$ ・・・（式9）

但し、標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{m} X_i) / m$, $\bar{Y} = (\sum_{j=1}^{n} Y_j) / n$

（3）（式9）で表される統計量（確率変数）T は、推定統計量と同じく、標準正規分布に従う。

（4）（式9）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

（例）

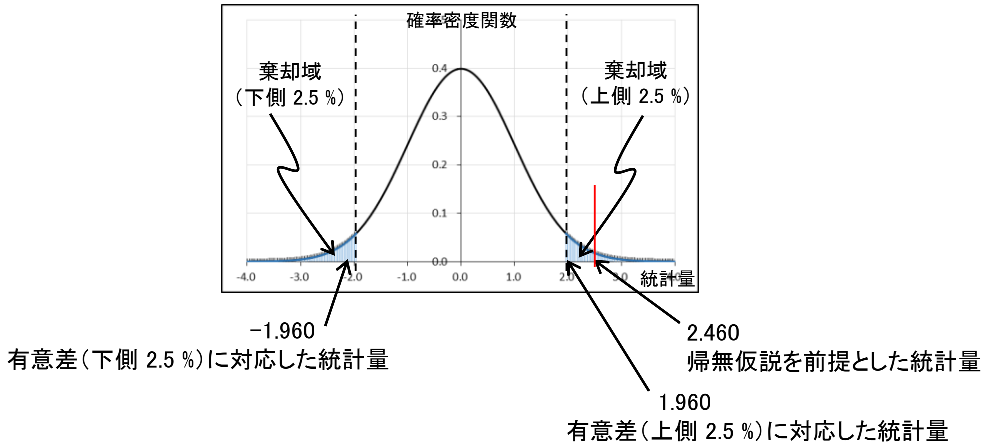
既知の母分散を、$\sigma_X^2 = 35$, $\sigma_Y^2 = 30$ として、（表12）の2つの標本データの平均tの間に差があるかどうかを検定する。
（式9）に（表12）に示す標本平均と既知の母分散を代入して、統計量 T を求める。

$T = (75.50 - 68.88) / (35/10 + 30/8)^{1/2} = 2.460$

正規標準分布の両側 5 % 有意水準で、（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 1.960）< 2.460
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = 1 − NORMDIST (2.460, 0, 1, true) = 0.007 < 0.025（上側棄却域）
帰無仮説を前提とした統計量は棄却域に入っている。よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。
つまり、母平均値に差があるという判断が採択されることになる（図20）。

（表12）2標本データ

選手名	種目A	選手名	種目B
A1	70	B1	65
A2	77	B2	70
A3	75	B3	60
A4	79	B4	69
A5	85	B5	67
A6	75	B6	68
A7	78	B7	74
A8	66	B8	78
A9	68		
A10	82		
平均	75.50	平均	68.88



（図20）標準正規分布の検定

9-3．平均の差の検定（2標本）：対応なし、母分散未知だが等分散

正規分布 N（μ_X, σ_X^2）に従う母集団の m 個の標本データ X_i と、正規分布 N（μ_Y, σ_Y^2）に従う母集団の n 個の標本データ Y_j の間に対応がない場合に、2つの母平均の間に差があるかどうかを検定する（但し、母分散は未知だが等分散 $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$）。

（検定の考え方と方法）

（1）帰無仮説は母平均 $\mu_X = \mu_Y$（差がない）、対立仮説は母平均 $\mu_X \neq \mu_Y$（差がある）であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける（両側検定）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（表1）の ⑨ に示す推定に使用する統計量に、（1）の帰無仮説 $\mu_X = \mu_Y$ を反映すれば、検定のための統計量 T（式10）が得られる。

$T = (\bar{X} - \bar{Y}) / ((1/m + 1/n)\, U^2)^{1/2}$　・・・（式10）

但し、標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{m} X_i) / m$, $\bar{Y} = (\sum_{j=1}^{n} Y_j) / n$

プールされた分散 $U^2 = ((m-1)\, U_X^2 + (n-1)\, U_Y^2) / (m+n-2)$, 不偏分散 $U_X^2 = \{\sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2\} / (m-1)$, $U_Y^2 = \{\sum_{j=1}^{n} (Y_j - \bar{Y})^2\} / (n-1)$

（3）（式10）で表される統計量（確率変数）T は、推定統計量と同じく、自由度 n + m − 2 のt 分布に従う。

（4）（式10）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

（例）

母分散 σ_X^2 と σ_Y^2 が未知、但し等しいとして、（表13）の2つの標本データの平均tの間に差があるかどうかを検定する。

プールされた分散は、それぞれの不偏分散を使用して、　$U^2 = ((10-1) * 36.72 + (8-1) * 29.84) / (10+8-2) = 33.71$

（式10）にプールされた分散 U^2 と（表13）に示す標本平均とを代入して、統計量 T を求める。

$T = (75.50 - 68.88) / ((1/10 + 1/8) * 33.71)^{1/2} = 2.406$,　自由度 16 の t 分布の両側 5 % 有意水準で、（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 2.120）$<$ 2.406

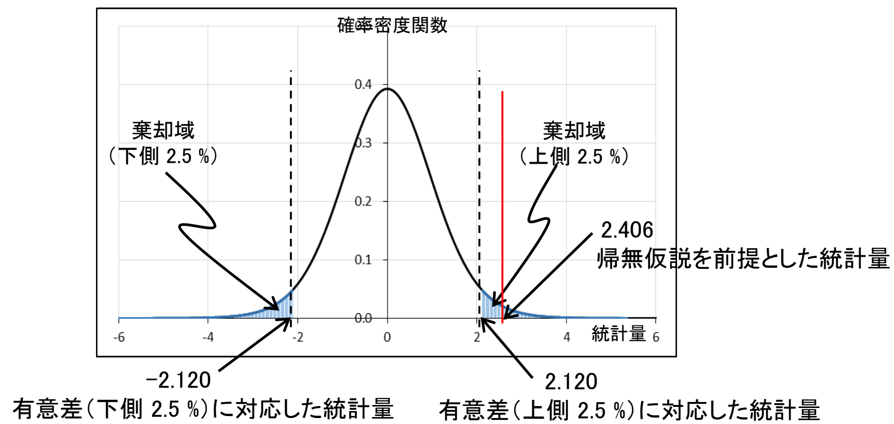
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = TDIST (2.406, 16, 1) = 0.014 $<$ 0.025（上側棄却域）

帰無仮説を前提とした検定統計量は棄却域に入っている。

よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。つまり、母平均値に差があるという判断が採択されることになる（図21）。

（表13）2標本データ

選手名	種目A	選手名	種目B
A1	70	B1	65
A2	77	B2	70
A3	75	B3	60
A4	79	B4	69
A5	85	B5	67
A6	75	B6	68
A7	78	B7	74
A8	66	B8	78
A9	68		
A10	82		
平均	75.50	平均	68.88
不偏分散	36.72	不偏分散	29.84



（図21）自由度 16 の t 分布の検定

9-4. 平均の差の検定(2標本): 対応なし、母分散未知 ウェルチの t 検定

正規分布 N (μ_X, σ_X^2) に従う母集団の m 個の標本データ X_i と、正規分布 N (μ_Y, σ_Y^2) に従う母集団の n 個の標本データ Y_j の間に対応がない場合に、2つの母平均の間に差があるかどうかを検定する(但し、母分散は未知)。

(検定の考え方と方法)

(1)帰無仮説は母平均 $\mu_X = \mu_Y$ (差がない)、対立仮説は母平均 $\mu_X \neq \mu_Y$ (差がある)であるとする。
帰無仮説の棄却域は両側に設ける(両側検定)。また、有意水準 = 5 % であるとする。

(2)(表1)の ⑩ に示す推定に使用する統計量に、(1)の帰無仮説 $\mu_X = \mu_Y$ を反映すれば、検定のための統計量 T (式11)が得られる。

$T = (\bar{X} - \bar{Y}) / (U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^{1/2}$ ・・・ (式11)

但し、標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{m} X_i) / m$, $\bar{Y} = (\sum_{j=1}^{n} Y_j) / n$

不偏分散 $U_X^2 = \{ \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2 \} / (m-1)$, $U_Y^2 = \{ \sum_{j=1}^{n} (Y_j - \bar{Y})^2 \} / (n-1)$

自由度 $f = (U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^2 / \{ (U_X^2 / m)^2 / (m-1) + (U_Y^2 / n)^2 / (n-1) \}$ の値に最も近い整数 ・・・ (式12)

(3)(式11)で表される統計量(確率変数) T は、推定統計量と同じく、自由度 f (式12)の t 分布に従う。

(4)(式11)を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

(例)

(表14)2標本データ

選手名	種目A	選手名	種目B
A1	70	B1	65
A2	77	B2	70
A3	75	B3	60
A4	79	B4	69
A5	85	B5	67
A6	75	B6	68
A7	78	B7	74
A8	66	B8	78
A9	68		
A10	82		
平均	75.50	平均	68.88
不偏分散	36.72	不偏分散	29.84

母分散 σ_X^2 と σ_Y^2 が未知だとして、(表14)の2つの標本データの平均tの間に差があるかどうかを検定する。

(式11)に(表14)に示す標本平均と不偏分散を代入して、統計量 T を求める。

$T = (75.50 - 68.88) / (36.72/(10-1) + 29.84/(8-1))^{1/2} = 2.435$

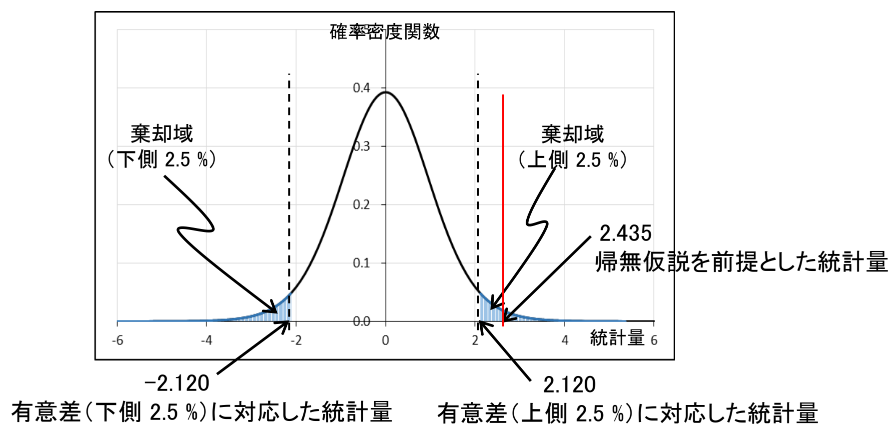
また、検定統計量の t 分布の自由度は、(式12)より、

$f = (36.72/10 + 29.84/8)^2 / ((36.72/10)^2/(10-1) + (29.84/8)^2 / (8-1)) = 15.7$ より、$f = 16$

自由度 16 の t 分布の両側 5 % 有意水準で、(上側棄却域 2.5 % の統計量 = 2.120) < 2.435

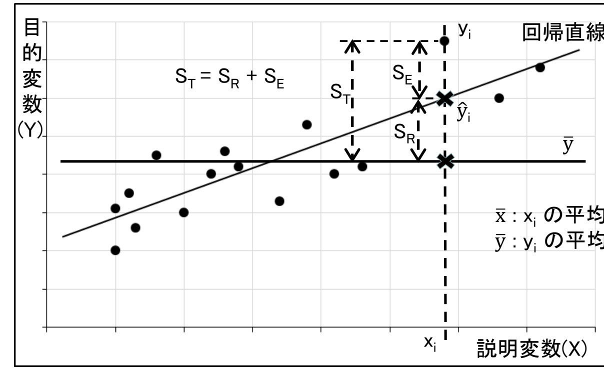
なお、Excel 関数を使用して、p 値 = TDIST (2.435, 16, 1) = 0.013 < 0.025 (上側棄却域)

帰無仮説を前提とした検定統計量は棄却域に入っている。よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。母平均値に差があるという判断が採択されることになる(図21)。



(図22)自由度 16 の t 分布の検定

10. 無相関の検定



(図23)単回帰分析の考え方

無相関の検定とは相関関係の有無を判定する検定である。

(考え方と方法)

無相関の検定に使用する統計量は、(表1)に示す区間推定のための統計量が近似式であるため、この統計量を直接使用できない(元来の区間推定統計量の式が複雑であり近似式が使われる)。そこで、単回帰分析の考え方(図23)を使った検定方法を用意する。

1)(表15)に単回帰分析の平方和と自由度を整理して載せておく(以下、Σ の $i = 1 \sim n$ は省略)。
単回帰式を、$\hat{y}_i = \alpha + \beta\ x_i$ ・・・ (式13) で表す。
$i = 1 \sim n$, x_i :説明変数, y_i :実測値(目的変数), $\hat{y}i$:予測値, $\bar{y}$:平均, α, β :定数

2)ここで、不偏分散比 V_R / V_E は、自由度 (ϕ_R, ϕ_E)、つまり、自由度 $(1, n-2)$ の F 分布に従うことが知られている(付録12)。

(表15)単回帰分析の指標

	実測値	予測値	残差
平方和　$S_T = S_R + S_E$	$S_T = S_{YY} = \Sigma(y_i - \bar{y})^2$	$S_R = \Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$S_E = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2$
自由度　$\phi_T = \phi_R + \phi_E$	$\phi_T = n-1$　(n はデータ数)	$\phi_R = 1$ (説明変数の数、単回帰は 1)	$\phi_E = \phi_T - \phi_R = (n-1) - 1 = n-2$
平均平方和(不偏分散)		$V_R = S_R / \phi_R = S_R / 1 = S_R$	$V_E = S_E / \phi_E = S_E / (n-2)$

3)変数 x_i の平方和 S_{XX} と変数 x_i と y_i の偏差積和 S_{XY} を用意する。

$$S_{XX} = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 = \Sigma(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \Sigma x_i^2 - 2\Sigma x_i \bar{x} + n\bar{x}^2 = \Sigma x_i^2 - 2\Sigma x_i(\Sigma x_i / n) + n(\Sigma xi / n)^2 = \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i / n)^2$$

$$S_{XY} = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \Sigma(x_i y_i - x_i\bar{y} - \bar{x}y_i + \bar{x}\bar{y}) = \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \bar{y} - \bar{x}\Sigma y_i + n\bar{x}\bar{y} = \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i(\Sigma y_i / n) - (\Sigma x_i / n)\Sigma y_i + n(\Sigma x_i / n)(\Sigma y_i / n)$$
$$= \Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i\ \Sigma y_i) / n$$

4)分散比 V_R / V_E を計算する。ここで、最小二乗法を使って求めた単回帰式の定数 $\alpha = \bar{y} - \beta\ \bar{x}$, $\beta = S_{XY} / S_{XX}$ (付録7)を使う。
また、相関係数 $r^2 = S_{XY}^2 / (S_{XX} S_{YY})$ である(定義、別途資料「統計的推定の手順」付録を参照)。

$$S_R = \Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \Sigma((\alpha + \beta\ x_i) - \bar{y})^2 = \Sigma((\bar{y} - \beta\ \bar{x}) + \beta\ x_i - \bar{y})^2) = \beta^2\ \Sigma(x_i - x)^2 = \beta^2 S_{XX} = (S_{XY} / S_{XX})^2 S_{XX} = S_{XY}^2 / S_{XX}$$

$$V_R / V_E = (S_R / \phi_R) / (S_E / \phi_E) = (S_R / 1) / (S_E / (n-2)) = S_R(n-2) / S_E = S_R(n-2) / (S_T - S_R)$$
$$= (S_{XY}^2 / S_{XX})(n-2) / (S_{YY} - S_{XY}^2 / S_{XX}) = (S_{XY}^2 / (S_{XX} S_{YY}))(n-2) / (1 - S_{XY}^2 / (S_{XX} S_{YY})) = r^2(n-2) / (1 - r^2)$$

(1)無相関の帰無仮説は母相関係数 $\rho = 0$、対立仮説は母相関係数 $\rho \neq 0$ である。この帰無仮説は、$S_R = 0$, $V_R = 0$ つまり、$V_R / V_E = 0$ と言い換えられる。
よって、帰無仮説の棄却域は、確率変数 V_R / V_E の確率分布の $V_R / V_E = 0$ から離れた両側になる(両側検定)。また、有意水準 = 5 % であるとする。

(2) V_R / V_E が自由度 $(1, n-2)$ の F 分布に従うので、$T = (V_R / V_E)^{1/2} = |r| \{(n-2) / (1-r^2)\}^{1/2}$ ・・・(式14) は自由度 $n-2$ の t 分布に従う(付録13)。

(3)(式14)を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

(例)

標本のサイズ $n = 10$, 標本データの相関係数 $r = 0.811$ のとき、母相関係数が 0 (無相関)であるかどうかを検定する。

(式14)に標本データのサイズと標本データの相関係数の値を代入して、統計量 T を求める。

$T = |0.811| \cdot \{(10-2) / (1-0.811^2)\}^{1/2} = 3.921$

自由度 8 の t 分布の両側 5 % 有意水準で、

(上側棄却域 2.5 % の統計量 = 2.752) < 3.921　なお、Excel 関数を使用して、p 値 = TDIST (3.921, 8, 1) = 0.002 ≦ 0.025 (上側棄却域)

帰無仮説を前提とした検定統計量は棄却域に入っている。よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。

つまり、無相関であるとはいえない(相関がある)という判断が採択されることになる。

11-1．一元配置分散分析（one-way ANOVA : analysis of variance）

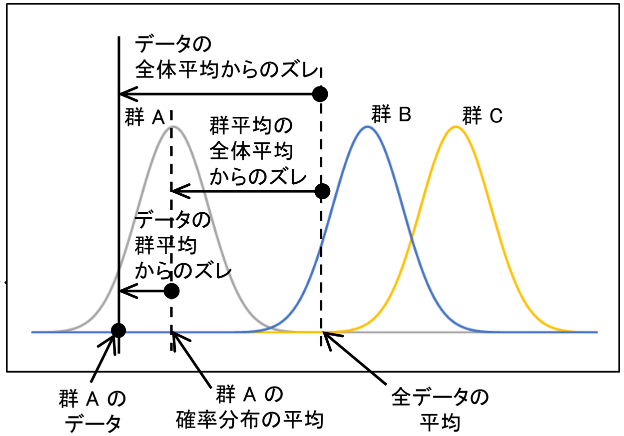
対応のない 2 標本の平均に差があるかどうかの検定には前述の t 検定が使用できるが、3 標本の平均に差があるかどうかの検定にはばらつき（分散）をもとにした分散分析が使用される。分散分析ではデータに影響を与えるものを因子という。また、因子のとる値を水準といい、水準ごとのデータの集まり（標本）のことを群といい確率分布を形成する。因子が 1 種類の場合の分散分析を一元配置分散分析という（別途資料「実験計画法の概要」を参照）。

（考え方と方法）

一元配置分散分析の考え方を3つの群の場合を例に（図24）に示す。正規分布に従い分散が等しい3つの群の平均に差があるかどうかを、① 群平均の全体平均からズレの大きさと ② 群内データの群内平均からのズレの大きさの比較で判定する（付録14）。

（1）帰無仮説は、3つの群の母平均が等しいとし、対立仮説は少なくとも一つの母平均は異なるとする。母平均が全て等しいときには群平均が全体平均に近くなる（① のズレはゼロに近くなる）。それに対し、母平均に差がある場合は、① のズレが ② のズレに対して大きくなる。このズレの比較を ① と ② の比 ① / ② を使って検定を行う。このズレの比は F 分布に従う。棄却域は確率分布の上側になる。

（2）（付録14）の分散分析表の平均平方和（ズレ）の比を使用して、F 分布に従う統計量 T の値を計算し、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。



（図24）順位和検定の手順

（例）

（表16）に示す3水準（群）のデータの平均の検定を行う。（表16）のデータのプロットを（図25）に示す。帰無仮説は、全ての水準の母平均が等しいこととする。（付録14）に従って分散分析表（表17）を作成する。

（表16）3水準（3群）のデータ

	水準1	水準2	水準3
1	60	80	69
2	65	75	71
3	67	70	63
4	55	66	58
5	58	68	55
6	66	72	79
7	50	65	74
8	48	72	67
9	59		75
10	63		53
データ数	10	8	10
群平均	59.1	71.0	66.2
全体平均	65.0		

（1）偏差平方和を求める。

群間平方和 $S_A = 10 * (59.1 - 65.0)^2 + 8 * (71.0 - 65.0)^2 + 10 * (66.2 - 65.0)^2 = 650.5$

郡内平方和 $S_E = (60 - 59.1)^2 + \cdots + (63 - 59.1)^2 + (80 - 71.0)^2 + \cdots + (72 - 71.0)^2 + (69 - 60.2)^2 + \cdots + (53 - 60.2)^2 = 1266.5$

全体平方和 $S_T = (60 - 65.0)^2 + \cdots + (63 - 65.0)^2 + (80 - 65.0)^2 + \cdots + (72 - 65.0)^2 + (69 - 65.0)^2 + \cdots + (53 - 65.0)^2 = 1917.0$

（2）自由度を求める

全体のデータ数 = N = 10 + 8 + 10 = 28， 水準の数 m = 3

よって、群間平方和の自由度 $\phi_A = m - 1 = 2$． 群内平方和の自由度 $\phi_E = N - m = 25$， 全体平方和の自由度 $\phi_T = N - 1 = 27$

（3）平均平方和を求める。

群間平均平方和 $V_A = S_A \,/\, \phi_A = 650.5 \,/\, 2 = 325.2$， 群内平均平方和 $V_E = S_E \,/\, \phi_E = 1266.5 \,/\, 25 = 50.7$

（4）検定統計量を求める。

検定統計量 $T = V_A \,/\, V_E = 325.2 \,/\, 50.7 = 6.42$

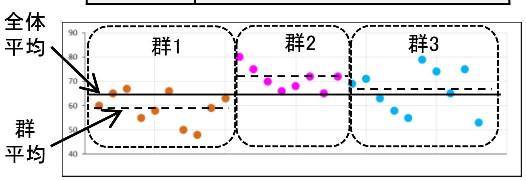
（5）自由度 (2, 25) の F 分布の上側 5 % 有意水準で、

（上側棄却域 5 % の統計量 = 3.39）< 6.42

なお、Excel 関数を使用して、

p 値 = 1 − F.DIST(6.42, 2. 25, TRUE) = 0.006 ≦ 0.05 （上側棄却域）

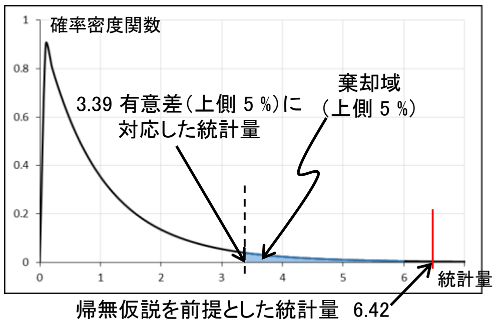
（6）帰無仮説を前提とした統計量 T は棄却域に入っている。帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択される。つまり、少なくとも一つの母平均は異なる（図26）。



（図25）（表16）のデータのプロット

（表17）分散分析表

	平方和	自由度	平均平方和	検定統計量
群間	$S_A = 650.5$	$\phi_A = 2$	$V_A = 325.2$	T = 6.42
群内	$S_E = 1266.5$	$\phi_E = 25$	$V_E = 50.7$	
全体	$S_T = 1917.0$	$\phi_T = 27$		



（図26）自由度 (2, 25) の F 分布の検定

11-2. 二元配置分散分析（two-way ANOVA : analysis of variance）

二元配置分散分析は因子が 2 種類の場合の分散分析である。一元配置分析と異なり、2 種類の因子それぞれの影響に加えて、因子同士の交互作用の影響も分析対象になる。

（考え方と方法）

一元配置分散分析の考え方を拡張して全体平方和を（式15）のように分解し、主効果と交互作用各々の平均平方和と残差の平均平方和の比が F 分布に従うことを利用する。

全体の平方和 = ①因子 A の主効果の平方和 + ②因子 B の主効果の平方和 + ③因子 A と因子 B の交互作用の平方和 + ④誤差の平方和　・・・（式15）

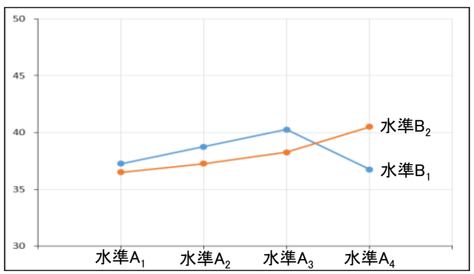
（1）無仮説は各因子の水準ごとの母平均が等しいとし、対立仮説は少なくとも一つの母平均は異なるとする。棄却域は確率分布の上側になる。

（2）各々の統計量の値を計算し、それに対応した p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

（例）（表18）に示す因子 A の 4 水準（群）の平均と因子 B の 2 水準（群）の平均の検定を行う。帰無仮説は全ての母平均が等しいこととする。対立仮説は少なくとも1つの母平均は異なるとする。
（表18）から作成した（図27）から、因子 A と因子 B の間には交互作用があると推察される。二元配置分散分析も一元配置分散分析と同じように、分散分析表を作成して分析する。

（表18）3水準（3群）のデータ

		水準A_1	水準A_2	水準A_3	水準A_4
水準B_1		35.0	37.0	40.0	39.0
		39.0	40.0	40.0	37.0
		38.0	39.0	41.0	35.0
		37.0	39.0	40.0	36.0
水準B_2		35.0	35.0	36.0	40.0
		38.0	39.0	39.0	42.0
		37.0	37.0	38.0	39.0
		36.0	38.0	40.0	41.0



（図27）（表18）の水準データ（平均）のプロット

（1）主効果、相互効果、全体の平均を求める。

水準 A_1 = (35.0 + 39.0 + 38.0 + ・・・ + 36.0)/8 = 36.9 , 水準 A_2 = (37.0 + 40.0 + 39.0 + ・・・ + 38.0)/8 = 38.0
水準 A_3 = (40.0 + 40.0 + 41.0 + ・・・ + 40.0)/8 = 39.3 , 水準 A_4 = (39.0 + 37.0 + 35.0 + ・・・ + 41.0)/8 = 38.6
水準 B_1 = (35.0 + 37.0 + 40.0 + 39.0 + ・・・ + 36.0) /16 = 38.3 , 水準 B_2 = (35.0 + 35.0 + 36.0 + 40.0 + ・・・ + 41.0)/8 = 38.1
水準 $A_1 \times B_1$ = (35.0 + 39.0 + 38.0 + 37.0)/4 = 37.3 , 水準 $A_1 \times B_2$ = (35.0 + 38.0 + 37.0 + 36.0)/4 = 36.5
水準 $A_2 \times B_1$ = (37.0 + 40.0 + 39.0 + 39.0)/4 = 38.8 , 水準 $A_2 \times B_2$ = (35.0 + 39.0 + 37.0 + 38.0)/4 = 37.3
水準 $A_3 \times B_1$ = (40.0 + 40.0 + 41.0 + 40.0)/4 = 40.3 , 水準 $A_3 \times B_2$ = (36.0 + 39.0 + 38.0 + 40.0)/4 = 38.3
水準 $A_4 \times B_1$ = (39.0 + 37.0 + 35.0 + 36.0)/4 = 36.8 , 水準 $A_4 \times B_2$ = (40.0 + 42.0 + 39.0 + 41.0)/4 = 40.5
全体 = (35.0 + 37.0 + 40.0 + 39.0 + 39.0 + ・・・ + 41.0)/32 = 38.2

（2）各々の平均平方和を求める。

水準 A の主効果の平方和 $S_A = 8 * (36.9 - 38.2)^2 + 8 * (38.0 - 38.2)^2 + 8 * (39.3 - 38.2)^2 + 8 * (38.6 - 38.2)^2 = 24.63$
水準 B の主効果の平方和 $S_B = 16 * (38.3 - 38.2)^2 + 16 * (38.1 - 38.2)^2 = 0.13$
水準 A の交互作用の平方和 $S_{A\times B} = 4 * (37.3 - 38,2)^2 + 4 * (36.5 - 38.2)^2 +$ ・・・ $+ 4 * (40.5 - 38.2)^2 - S_A - S_B = 41.63$
全体平方和 $S_T = (35.0 - 38.2)^2 + (37.0 - 38.2)^2 + (40.0 - 38.2)^2 + (39.0 - 38.2)^2 +$ ・・・ $+ (41.0 - 38.2)^2 = 116.88$
残差の平方和 $S_E = S_T - S_A - S_B - S_{A\times B} = 116.9 - 24.6 - 0.1 - 41,6 = 50.50$

（3）自由度を求める。 全体のデータ数 = N = 32 , 水準 A の数 m = 4 , 水準 B の数 n = 2
S_A の自由度 $\phi_A = m - 1 = 3$, S_B の自由度 $\phi_B = n - 1 = 1$, $S_{A\times B}$ の自由度 $\phi_{A\times B} = (m - 1)*(n - 1) = 3$
S_T の自由度 $\phi_T = N - 1 = 31$, S_E の自由度 $\phi_E = \phi_T - \phi_A - \phi_B - \phi_{A\times B} = 31 - 3 - 1 - 3 = 24$

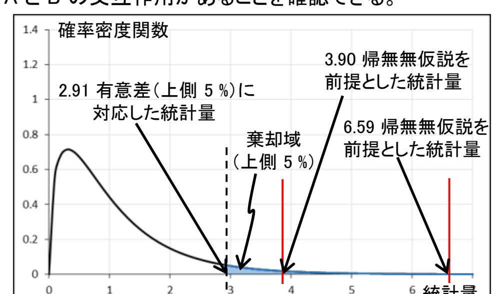
（4）平均平方和を求める。
$V_A = S_A / \phi_A = 24.63/3 = 8.21$, $V_B = S_B / \phi_B = 0.13/1 = 0.13$, $V_{A\times B} = S_{A\times B} / \phi_{A\times B} = 41.63/3 = 13.88$, $V_E = S_E / \phi_E = 50.50/24 = 2.10$

（5）検定統計量を求める（表19）。
$T_A = V_A / V_E = 8.21 / 2.10 = 3.90$, $T_B = V_B / V_E = 0.13 / 2.10 = 0.06$, $T_{A\times B} = V_{A\times B} / V_E = 13.88 / 2.10 = 6.59$

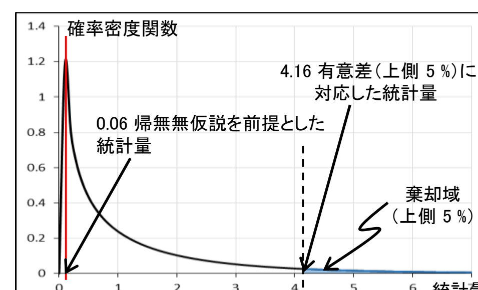
（6）検定量 T_A ,T_B , $T_{A\times B}$ が F 分布に従うことを使って検定を行う（F 分布の上側 5 % 有意水準）。p 値の算出には、Excel 関数を使用する。
(T_A = 3.90) >（上側棄却域 5% の統計量 = 2.91）, p 値 = 1 − F.DIST(3.90, 3, 24, TRUE) = 0.021 < 0.05 → 帰無仮説を棄却、対立仮説を採択（図28）
(T_B = 0.06) <（上側棄却域 5% の統計量 = 4.16）, p 値 = 1 − F.DIST(0.06, 1, 24, TRUE) = 0.808 > 0.05 → 帰無仮説を棄却できず、受容（図29）
($T_{A\times B}$ = 6.59) >（上側棄却域 5% の統計量 = 2.91）, p 値=1−F.DIST(6.59, 3, 24, TRUE) = 0.002 < 0.05 → 帰無仮説を棄却、対立仮説を採択（図28）
つまり、因子 A の主効果 と因子 A と B の交互作用があることを確認できる。

（表19）二元配置の分散分析表

	平方和	自由度	平均平方和	検定統計量
因子 A	S_A = 24.63	ϕ_A = 3	V_A = 8.21	T_A = 3.90
因子 B	S_B = 0.13	ϕ_B = 1	V_B = 0.13	T_B = 0.06
因子 A × B	$S_{A\times B}$ = 41.63	$\phi_{A\times B}$ = 3	$V_{A\times B}$ = 13.88	$T_{A\times B}$ = 6.59
残差	S_E = 50.50	ϕ_E = 24	V_E = 2.10	
全体	S_T = 116.88	ϕ_T = 31		



（図28）自由度 (3, 24) の F 分布の検定

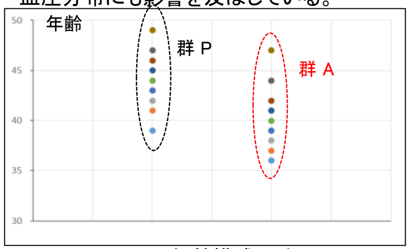


（図29）自由度 (1, 24) の F 分布の検定

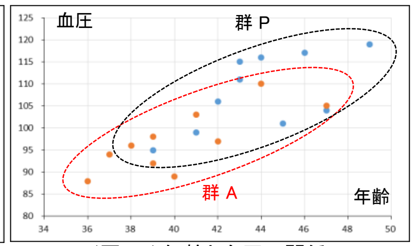
12．共分散分析（ANCOVA : analysis of covariance）

共分散分析は分散分析と同じく、群間データの平均の差を検定する分析手法である。しかし、2つの群のいずれにも影響を与える因子（共変量という）が存在する場合、分散分析は使えない。このような場合、共変量の影響を取り除いたうえで分散分析を行う必要がある。そのために、回帰分析を使用する。いわば、共分散分析は、分散分析と回帰分析を組み合わせた手法であるといえる。（表20）のデータ（参考文献、東京理科大学浜田知久馬）を使って、分析手順を示す。

（例）（表20）は、プラセボ（偽薬）P を服用したときの血圧データと製剤 A を使用したときの血圧データを示す（被験者は、10 名）。（図30）に示すように、群 P と群 A を構成する被験者の年齢分布には差がある。また（図31）に示すように、2つの群の各々において血圧は年齢の影響を受けることが分かる。年齢は共変量であり、2つの群の被験者構成にも血圧分布にも影響を及ぼしている。



（図30）年齢構成の違い



（図31）年齢と血圧の関係

（表20）2群のデータ

群 P	年齢	血圧	群 A	年齢	血圧
P_1	39	95	A_1	36	88
P_2	41	99	A_2	37	94
P_3	42	106	A_3	38	96
P_4	43	111	A_4	39	92
P_5	43	115	A_5	39	98
P_6	44	116	A_6	40	89
P_7	45	101	A_7	41	103
P_8	46	117	A_8	42	97
P_9	47	104	A_9	44	110
P_{10}	49	119	A_{10}	47	105
平均	43.9	108.3	平均	40.3	97.2

（表21）平均年齢に調整した血圧のデータ

群 P	年齢	調整血圧	群 A	年齢	調整血圧
P_1	42.1	100.3	A_1	42.1	98.4
P_2	42.1	100.9	A_2	42.1	102.7
P_3	42.1	106.2	A_3	42.1	103.0
P_4	42.1	109.5	A_4	42.1	97.3
P_5	42.1	113.5	A_5	42.1	103.3
P_6	42.1	112.8	A_6	42.1	92.6
P_7	42.1	96.0	A_7	42.1	104.9
P_8	42.1	110.3	A_8	42.1	97.2
P_9	42.1	95.6	A_9	42.1	106.8
P_{10}	42.1	107.2	A_{10}	42.1	96.6
平均	42.1	105.2	平均	42.1	100.3

（1）年齢の影響を配慮しないときの群の血圧平均の差を（図32）に示す。一方、（付図10）に示す方法で年齢の影響を除いたとき（全体の平均年齢に調整した血圧を用いたとき）の群の血圧平均の差を（図33）に示す。また、平均年齢に調整した血圧を（表21）に示す。なお、このような変換が可能なのは、各々の群の回帰直線の傾きが同じと見なせるときである。この例では、1.78 と 1.64 と近い傾きで、共通の回帰係数は 1.70 である（付録16）。

（2）全体平方和は（表20）のデータを使用して求め、郡内平方和は（表21）のデータを使用して求める。また、群間平方和 = 全体平方和 − 群内平方和である。
これらのデータをもとに分散分析表を作成し、F 検定を行う。
帰無仮説は2つの群の母平均が等しい、対立仮説は母平均は異なるとする。

群内平方和 S_E = 調整後の群 P の群内平方和 + 調整後の群 A の群何平方和

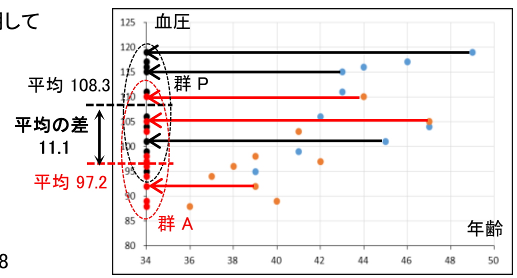
$= (100.3 - 105.2)^2 + (100.9 - 105.2)^2 + \cdots + (107.2 - 105.2)^2$

$+ (98.4 - 100.3)^2 + (102.7 - 100.3)^2 + \cdots + (96.6 - 100.3)^2 = 573.0$

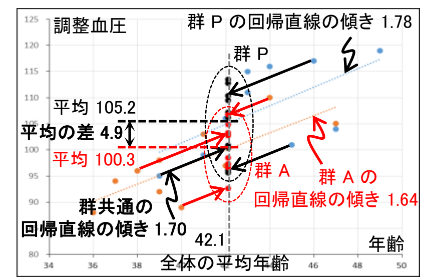
全体平均 =（群 P の平均 + 群 A の平均）/ 2 ＝(108.3 + 97.2) / 2 = 102.8 を使って、
全体平方和 S_T = 群 P の全体平方和 + 群 A の全体平方和

$= (95 - 102.8)^2 + \cdots + (119 - 102.8)^2 + (88. - 102.8)^2 + \cdots + (105 - 102.8)^2 = 1707.8$

従って、群間平方和 $S_A = S_T - S_E = 1707.8 - 573.0 = 1134.7$
なお、以上の計算を定式化した（付録15）の式を使用して、S_A, S_E, S_T を求めることもできる（付録16）。



（図32）年齢の影響を配慮しないときの血圧差



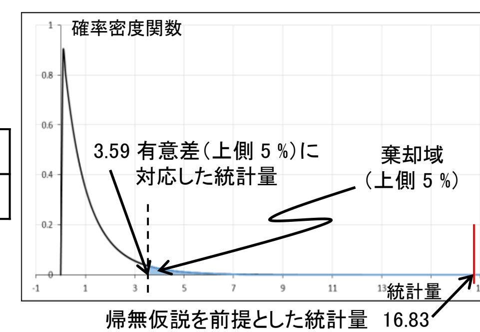
（図33）年齢の影響を配慮したときの血圧差

（3）S_T の自由度 ϕ_T は、10 + 10 = 20 のデータからなる群全体の平均を1つを使用しているので、$\phi_T = 10 + 10 - 1 = 19$
S_E の自由度 ϕ_E は、群ごとの平均値2つと、年齢調整のときに年齢の平均を1つを使用しているので、$\phi_E = 10 + 10 - 2 - 1 = 17$
従って、S_A の自由度 ϕ_A は、$\phi_A = \phi_T - \phi_E = 19 - 17 = 2$

（4）以上から、（表22）の分散分析表を得る。
自由度 (2, 17) の F 分布の上側 5 % 有意水準で、
（上側棄却域 5 % の統計量 = 3.59）< 16.83
なお、Excel 関数を使用して、
p 値 = 1 − F.DIST(16.83, 2, 17, TRUE)
= 0.0001 ≦ 0.05（上側棄却域）
帰無仮説を前提とした統計量 T は棄却域に入っている。
よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。つまり、2つの群の母平均は異なるという判断が採択されることになる（図34）。

（表22）分散分析表

	平方和	自由度	平均平方和	検定統計量
群間	$S_A = 1134.7$	$\phi_A = 2$	$V_A = 567.4$	T = 16.83
群内	$S_E = 573.0$	$\phi_E = 17$	$V_A = 33.7$	
全体	$S_T = 1707.8$	$\phi_T = 19$		



（図34）自由度 (2, 17) の F 検定

13−1. 適合度の検定

適合度の検定とは、標本から求めた度数分布が期待される特定の度数分布に一致（適合）するか否かを判断する検定である。

（考え方と方法）

（1）帰無仮説は標本から求めた度数分布 = 期待される特定の度数分布、対立仮説は標本から求めた度数分布 ≠ 期待される特定の度数分布であるとする。
帰無仮説の棄却域は上側に設けることになる（理由は下記）。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）母集団 E が n 個のグループ（カテゴリー） $E_1, E_2, \cdots, E_n$ から成っており、E からランダムに 1 つ個体を選んだときそれが E_i に属する確率を p_i とする。
E から N 個の個体をランダムに抽出して、そのうち E_i に属するものの個数（度数）を X_i とする。E_i に属すると期待される個数（度数）は $N p_i$ である。
このとき、これら X_i と $N p_i$ という2つの度数分布が等しいか否かを判断するための検定統計量を（式16）に示す。この（式16）の導出は（付録17）に示す。
帰無仮説は度数 X_i と度数 $N p_i$ が等しいという仮説、つまり、（式17）の検定統計量 T = 0 を主張する仮説であるが、度数 X_i と度数 $N p_i$ の差が大きくなり、T の値が 0 から離れて大きな値を取るとき、この帰無仮説は棄却されることになる（棄却域は T の値が大きくなる側だけに設けることになる）。

$$T = \{\sum_{i=1}^{n}(X_i - N p_i)^2\}/(N p_i) \qquad \cdots \quad （式16）$$

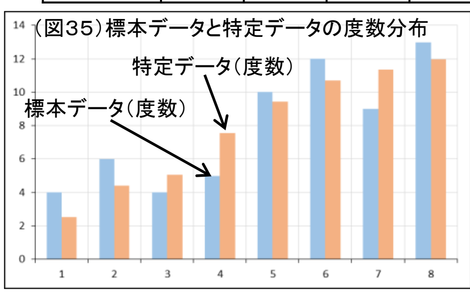
（3）（付録17）に示すように、（式16）で示される統計量は、自由度 n − 1 のカイ二乗分布に従う。

（4）（式16）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

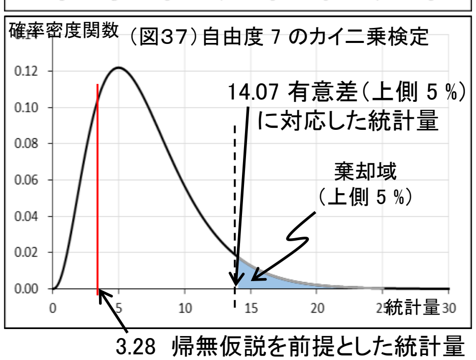
（例1）

下表（図N35）に示す標本と特定データの度数分布の適合度を検定する。

（表23）	1	2	3	4	5	6	7	8	総和
標本 X_i	4	6	4	5	10	12	9	13	N = 63
確率 p_i	0.04	0.07	0.08	0.12	0.15	0.17	0.18	0.19	1.00
特定 $N p_i$	2.52	4.41	5.04	7.55	9.45	10.7	11.3	12.0	63



（図35）標本データと特定データの度数分布



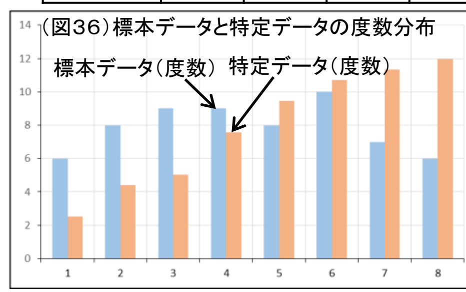
（図37）自由度 7 のカイ二乗検定

標本の度数分布が特定の度数分布に似ている例である。
X_i = 標本データ、$N p_i$ = 特定データ、
N = 63 を（式16）に代入して、T を求める。
計算結果は、T = 3.28
自由度 8 − 1 = 7 のカイ二乗 分布の
上側 5 % 有意水準で、
3.28 ＜（上側棄却域 5 % の統計量 = 14.07）
なお、Excel 関数を使用して、
p 値 = CHIDIST (3.28, 7)
= 0.858 ＞ 0.05 （上側棄却域）
帰無仮説を前提とした検定統計量は棄却域に入らない。
従って、標本の度数分布は特定の度数分布に等しいという帰無仮説を受容することになる（図37）。

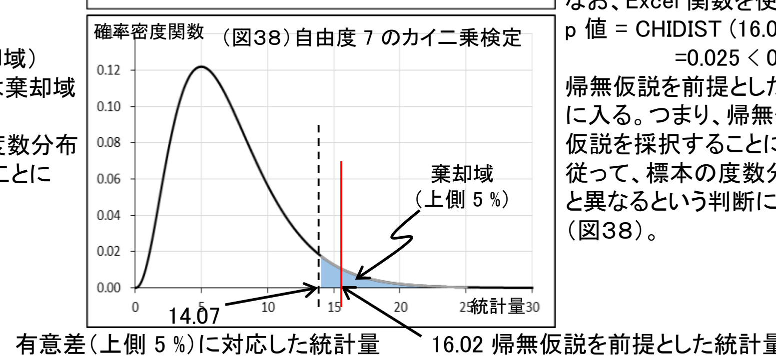
（例2）

下表（図36）に示す標本と特定データの度数分布の適合度を検定する。

（表24）	1	2	3	4	5	6	7	8	総和
標本 X_i	6	8	9	9	8	10	7	6	N = 63
確率 p_i	0.04	0.07	0.08	0.12	0.15	0.17	0.18	0.19	1.00
特定 $N p_i$	2.52	4.41	5.04	7.55	9.45	10.7	11.3	12.0	63



（図36）標本データと特定データの度数分布



（図38）自由度 7 のカイ二乗検定

標本の度数分布が特定の度数分布とかなり異なる例である。
X_i = 標本データ、$N p_i$ = 特定データ、
N = 63 を（式16）に代入して、
T を求める。計算結果は、T = 16.02
自由度 8 − 1 = 7 のカイ二乗 分布の
上側 5 % 有意水準で、
（上側棄却域 5 % の統計量 = 14.07）＜ 16.02
なお、Excel 関数を使用して、
p 値 = CHIDIST (16.02, 7)
=0.025 ＜ 0.05 （上側棄却域）
帰無仮説を前提とした検定統計量は棄却域に入る。つまり、帰無仮説を棄却し、対立仮説を採択することになる。
従って、標本の度数分布は特定の度数分布と異なるという判断になる（図38）。

13-2. 独立性の検定

独立性の検定とは、2つの因子を持つ標本があるとき、2つの因子が独立かどうか、つまり互いに影響し合っていないことを判断するための検定である。
適合度の検定の発展版と捉えることができる。

（考え方と方法）

1）因子 A と B を持つ標本を考える。因子 A は区分 A_1, 区分 A_2, ・・・, 区分 A_m で構成され、因子B は区分 B_1, 区分 B_2, ・・・, 区分 B_n で構成されるとする。また、ランダムに選んだ N 個の標本が区分 A_i に属する確率を p_i 、区分 B_j に属する確率を q_j であるとする。
このとき、ランダムに選んだ標本が因子 A では区分 A_i に、因子 B では区分 B_j に属する標本 X_{ij} の確率（区分 $A_i B_j$ に属する確率）は、因子 A と B が互いに独立であれば、$p_i q_j$ になる（表25）。

2）ここで、適合度の検定に使用する検定統計量（式16）を活用する。
適合度の検定で使用している区分 E_i を区分 $A_i B_j$ に置き換え、区分数 n を区分数 m n に、確率 p_i を確率 $p_i q_j$ に置き換える。その結果、自由度 m n − 1 のカイ二乗分布に従う（式17）を得る。

$$T = \{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_i - N p_i q_j)^2 \} / (N p_i q_j) \quad ・・・（式17）$$

（表25）2因子を持つ標本

因子	A_1	A_2	・・・	A_m	確率
B_1	$p_1 q_1$	$p_1 q_1$	・・・	$p_1 q_1$	q_1
B_2	$p_1 q_1$	$p_1 q_1$	・・・	$p_1 q_1$	q_2
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・
B_n	$p_1 q_1$	$p_1 q_1$	・・・	$p_1 q_1$	q_n
確率	p_1	p_2	・・・	p_m	1

（注）表の右下は、確率の合計で 1 になる。

（1）帰無仮説は因子 A と因子 B が独立であること、つまり、帰無仮説は、因子区分 $A_i B_j$ の確率が $p_i q_j$ で表されることで、（式17）の前提条件になっている。
対立仮説は因子 A と因子 B が独立でないことである。帰無仮説の棄却域は適合度の検定の場合と同じく上側になる。また、有意水準 = 5 % であるとする。

（2）（式17）の確率p_i , q_j は未知である。そこで、因子区分 A_i に属する標本の個数 a_i と因子区分 B_j に属する標本の個数 b_j を使って確率 p_i の代わりに a_i / N を、確率 q_j の代わりに b_j / N を使う。

$$T = \{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - a_i b_j / N)^2 \} / (a_i b_j / N) \quad ・・・（式18）$$

（3）（式18）で示される統計量（確率変数）は、適合度の検定統計量を参考にすれば、自由度 (m − 1) (n − 1) のカイ二乗分布に従うことが分かる。

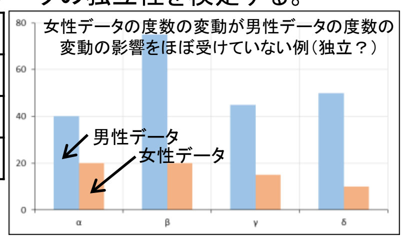
（4）（式18)を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。

（例1）

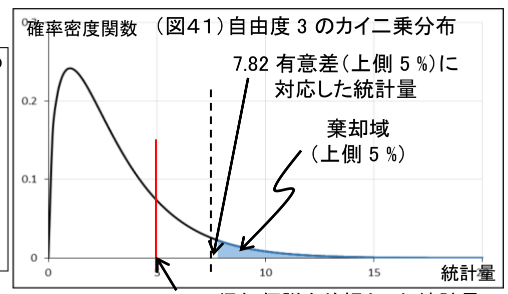
下表（図39）に示す男性データと女性データの独立性を検定する。

表26	α	β	γ	δ	合計
男性	40	80	45	50	215
女性	20	20	15	10	65
合計	60	100	60	60	280

N = 280 , X_{11} = 40, X_{12} = 80, X_{13} = 45, X_{14} = 50,
X_{21} = 20, X_{22} = 20, X_{23} = 15, X_{24} = 10,
a_1 = 215, a_2 = 65, b_1 = 60, b_2 = 100, b_3 = 60, b_4 = 60



（図39）2因子が独立（？）



（例1）は因子が互いに独立と思われる例、（例2）は因子が互いに影響し合うと思われる例である。

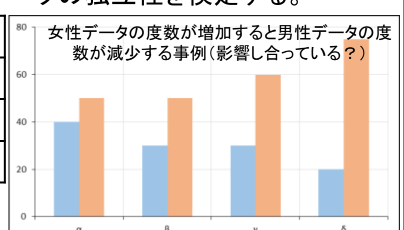
（例1）（式18)を使用して T = 5.15 が求まる。
自由度 (4 − 1)・(2 − 1) = 3 のカイ二乗分布の上側 5 % 有意水準で、
5.15 < (上側棄却域 5 % の統計量 = 7.82)
なお、p 値 = CHIDIST (5.15, 3) (Excel 関数使用)
= 0.161 > 0.05 (上側棄却域)
この統計量は棄却域に入らない。帰無仮説を受容する。因子 α, β , ・・・ は、性別の影響を受けないと判断できる（図41）。

（例2）

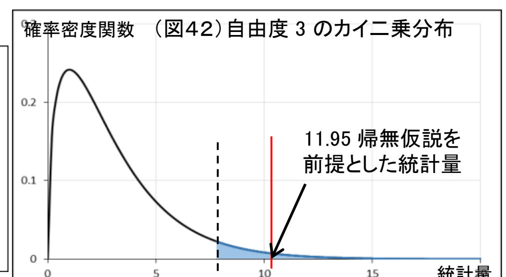
下表（図40）に示す男性データと女性データの独立性を検定する。

表27	α	β	γ	δ	合計
男性	40	30	30	20	120
女性	50	50	60	75	235
合計	90	80	90	95	355

N = 355 , X_{11} = 40, X_{12} = 30, X_{13} = 30, X_{14} = 20,
X_{21} = 50, X_{22} = 50, X_{23} = 60, X_{24} = 75,
a_1 = 120, a2 = 235, b_1 = 90, b_2 = 80, b_3 = 90, b_4 = 95



（図40）2因子が独立でない（？）



（例2）（式18)を使用して T = 11.95が求まる。
自由度 (4 − 1)・(2 − 1) = 3 のカイ二乗分布の上側 5 % 有意水準で、
(上側棄却域 5 % の統計量 = 7.82) < 11.95
なお、p 値 = CHIDIST (11.95, 3) (Excel 関数使用)
= 0.008 < 0.05 (上側棄却域)
この統計量は棄却域に入る。帰無仮説を棄却し、対立仮説を採択する。因子 α, β ,・・・ は、性別の影響を受けると判断できる（図42）。

14−1. ウィルコクソンの符号付順位検定（Wilcoxon signed rank test ）

ノンパラメトリック検定はデータが従う確率分布を仮定しない。ウィルコクソンの符号付順位検定は、14－2で取り上げるウィルコクソンの順位和検定と同じくノンパラメトリック検定の一つであり、量の情報を使わずに量の大小関係（順位）の情報だけを使って、2つの標本が同じ確率分布に従うか否かを判断する。分布の形は同じだが位置だけが異なる場合を想定している。ウィルコクソンの符号付順位検定は対応のあるデータの検定に使用する。データ数が多い場合を取り上げる（少ないときは場合の数に基づく確率計算を行う）。

（考え方と方法）・・・（図43）

対応ある標本データ(X_i, Y_i)の差を表す確率変数 $Z_i = X_i - Y_i$ を導入する。
そして、Z_i の絶対の小さい順に順位 R_i $(R_i = 1, 2, \cdots, n)$を付ける。

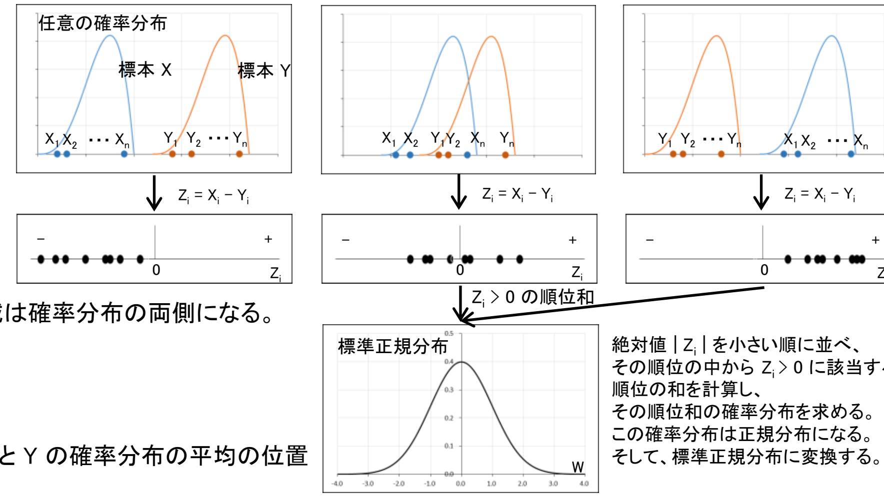
$Z_i > 0$ の値に付けられた順位の総和を $W = \sum_{i=1\,(z_i \geqq 0)}^{n} R_i$ で表すと、（式19）の統計量 T は標準正規分布に従う（付録18）。

$$T = (W - E[W]) / (V[W])^{1/2} \quad \cdots \quad （式19）$$

但し、$E[W] = n(n+1)/4$, $V[W] = n(n+1)(2n+1)/24$

（1）帰無仮説は2つの確率分布の位置母数（例えば、平均）が等しいこと（分散のような尺度母数が等しければ同じ確率分布になる）、対立仮説は位置母数が異なることとする。確率分布の位置が異なるとき、Z_i の値はマイナス側かプラス側かに遍在する。結果、順位和は小さな値か大きな値をとることになる。つまり、棄却域は確率分布の両側になる。

（2）（式P）を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。
この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。



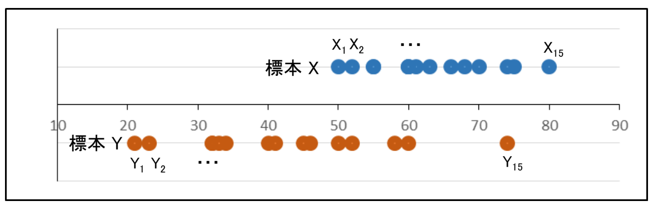
（図43）符号付順位検定の手順

（例）

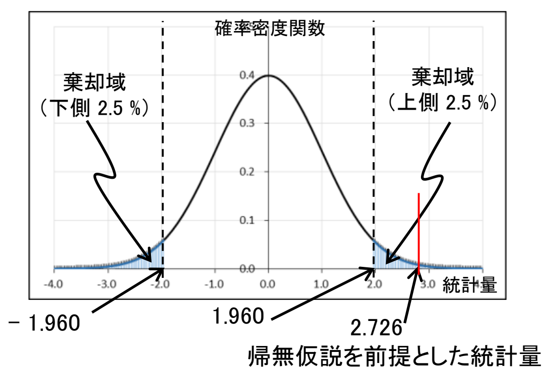
（表26）に示す標本 X と Y の確率分布の平均が等しいか否かを検定する。
標本 X と Y のデータの分布を並べてプロットしたのが（図44）である。この図から、標本 X と Y の確率分布の平均の位置は異なる（異なる分布である）ことが予見される。

（表26）標本データ

	X	Y	Z	|Z|	順位
1	60	32	28	28	11
2	61	46	15	15	3
3	52	60	−8	8	2
4	63	32	31	31	12
5	66	45	21	21	7
6	68	49	19	19	5
7	70	52	18	18	4
8	60	34	26	26	10
9	80	40	40	40	13
10	50	74	−24	24	9
11	55	58	−3	3	1
12	75	21	54	34	15
13	74	23	51	51	14
14	60	40	20	20	6
15	55	33	22	32	8



（図 44）標本データのプロット



（図 45）標準正規分布の検定

1）表より、差がプラスの順位の総和を求める。
$W = 11 + 3 + 12 + \cdots + 13 + 15 = 108$

2）順位和 W の期待値（平均）と分散を求める（n = 15）。
$E[W] = 15 * (15 + 1) / 4 = 60$
$V[W] = 15 * (15 + 1) * (2 * 15 + 1) / 24 = 310$

3）（式19）を使って、検定統計量 T を求める。
$T = (108 - 60) / 310^{1/2} = 2.726$

4）標準正規分布の両側 5 % 有意水準で、
（上側棄却域 2.5 % の統計量 = 1.960）< 2.726
なお、Excel 関数を使用して、
p 値 = 1 − NORMDIST (2.726, 0, 1, true)
= 0.003 ≦ 0.025（上側棄却域）

5）帰無仮説を前提とした統計量 T は棄却域に入っている。
よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。つまり、2つの標本の確率分布は異なるという判断が採択されることになる（図45）。

なお、（付録19）に2つの標本が同じ確率分布に従うと判断される例を載せておく。

14-2. ウィルコクソンの順位和検定 (Wilcoxon rank sum test)

ウィルコクソンの順位和検定は、対応のないデータの検定に使用するノンパラメトリック検定である。マン・ホイットニーの U 検定(Mann-Whitney U test)と同じ機能を持つ。分布の形は同じだが位置だけが異なる場合を想定している。ここでは、データ数が多い場合を取り上げる(少ないときは場合の数に基づく確率計算を行う)。

(考え方と方法)

標本 X から抽出した m 個の標本 X_i と標本 Y から抽出した n 個の標本 Y_j を混ぜて小さい順に並べ順位を付ける。X_i に付いた順位を R_i , Y_j に付いた順位を S_j とする。

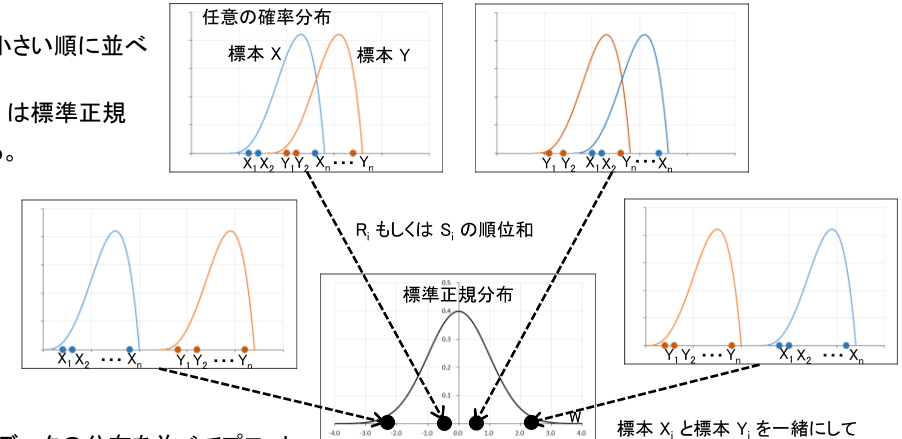
そして、X_i の値に付けられた順位の総和を $W = \sum_{i=1}^{m} R_i$ で表すと、(式20)の統計量 T は標準正規分布に従う(付録20)。S_j の総和(= 一定値の全体の総和 − R_i の総和)でも同じである。

$T = (W - E[W]) / (V[W])^{1/2}$ ・・・ (式20)

但し、$E[W] = m(m+n+1)/2$, $V[W] = mn(m+n+1)/12$

(1) 帰無仮説は2つの確率分布の位置母数(例えば、平均)が等しいこと(分散のような尺度母数が等しければ同じ確率分布になる)、対立仮説は位置母数が異なることとする。確率分布の位置が異なるとき、順位和は平均からずれた小さな値か大きな値をとることになる。つまり、棄却域は確率分布の両側になる。

(2) (式20)を使用して統計量 T の値求め、それに対応した p 値を求める。この p 値と有意差 5 % を比較して統計的検定を行う。



(図44) 順位和検定の手順

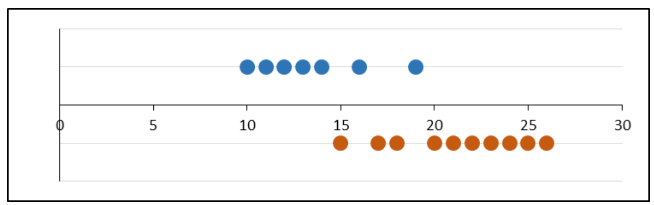
標本 X_i と標本 Y_j を一緒にして小さい順に並べ、その順位の中から X_i に関わる順位の和を計算し、その順位和の確率分布を求める。この確率分布は正規分布になる。そして、標準正規分布に変換する。

(例)

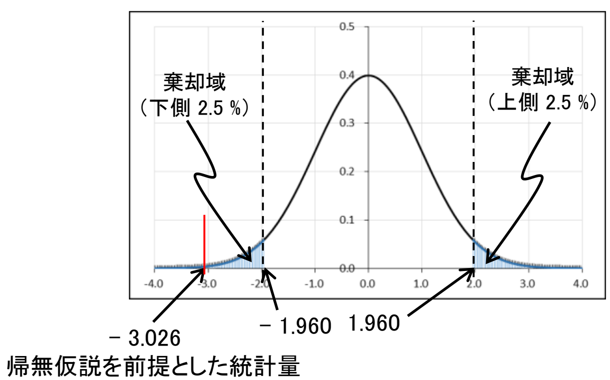
(表27)に示す標本 X と Y の確率分布の平均が等しいか否かを検定する。標本 X と Y のデータの分布を並べてプロットしたのが(図45)である。この図から標本 X と Y の確率分布の平均の位置は異なる(異なる分布である)ことが予見される。

(表27) 標本データ

	X	Y	X と Y の混合	順位
1	16	18	10	1
2	10	25	11	2
3	19	22	12	3
4	14	17	13	4
5	12	15	14	5
6	13	20	15	6
7	11	24	16	7
8		23	17	8
9		21	18	9
10		26	19	10
11			20	11
12			21	12
13			22	13
14			23	14
15			24	15
16			25	16
17			26	17



(図45) 標本データのプロット



(図46) 標準正規分布の検定

1) (表27)より、X_i の順位の総和を求める。
$W = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 10 = 32$

2) 順位和 W の期待値(平均)と分散を求める(m = 7 , n = 10)。
$E[W] = 7 * (7 + 10 + 1) / 2 = 63$
$V[W] = 7 * 10 * (7 + 10 + 1) / 12 = 105$

3) (式20)を使って、検定統計量 T を求める。
$T = (32 - 63) / 105^{1/2} = -3.026$

4) 標準正規分布の両側 5 % 有意水準で、
$-3.026 <$ (下側棄却域 2.5 % の統計量 $= -1.960$)
なお、p 値 = NORMDIST (− 3.026, 0, 1, true)
= 0.001 ≦ 0.025 (下側棄却域)

5) 帰無仮説を前提とした統計量 T は棄却域に入っている。よって、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されることになる。つまり、2つの標本の確率分布は異なると判断が採択されることになる(図46)。

なお、(付録21)に2つの標本が同じ確率分布に従うと判断される例を載せておく。

15. 多重比較分析（ボンフェローニ補正）

対応のない 2 標本（群）の平均に差があるかどうかの検定に t 検定を使用するが、3 群の平均に差があるかどうかの検定には分散分析が使用される。しかし、分散分析では、どの群の平均の間に差があるのかまでは特定できない。そこで、2 群ずつ選んで t 検定を繰り返して実施すればどの群の平均の間に差があるのか特定できるのでないかというアイデアがある。しかし、いわゆる「多重性の問題」（下記）があるため、2 群の間の平均を繰り返し検定する方法をそのまま使用することはできない。また、等分散を前提とする種類の t 検定は、等分散を確認するための検定を別途行うため 2 回の検定を重ねることになり、やはり「多重性の問題」に直面するので、この方法は好ましくない（よって、平均の差の検定では等分散の前提にこだわらない、ウェルチの t 検定の使用が好ましい）。

■検定の多重性の問題

仮説検定の回数を増やすと、第1種の過誤の確率が大きくなる。つまり、有意差が発生する（帰無仮説を棄却する）確率が大きくなるという問題が発生する。

有意差 α = 0.05 であるとき、有意差が発生する確率 = 1 − 有意差が発生しない確率 = 1 − (1 − 0.05) = 0.05 となるが、

2 回の検定を繰り返すと、有意差が発生する確率 = 1 − 2 回とも有意差が発生しない確率 = $1 - (1 - 0.05)^2 = 1 - 0.9025 = 0.0975$

3 回の検定を繰り返すと、有意差が発生する確率 = 1 − 3 回とも有意差が発生しない確率 = $1 - (1 - 0.05)^3 = 1 - 0.8574 = 0.1426$

と有意差が発生する確率が大きくなっていく。これが検定の多重性の問題である。

検定の多重性の問題に対処する方法が提案されている。

①ボンフェローニ補正（Bonferroni correction）： 有意差 = α ／ N （N は検定の回数） 検定 1 回あたりの有意差を小さくして検定する。

②テューキー法（Tukey' s test）： 3 以上の群の平均の差の検定で、2 群の t 分布に代わる方法になる。各々の群の平均に差がないという帰無仮説を用いる。

③ダネット法（Dunnett' s test） ： 1 つの対照とする群の母平均と他の群の母平均に差があるかどうかを検定する方法である。

（例）3 群の平均の間に差があるかどうかを 2 群ずつの比較で検定する。検定の多重性の問題を回避するために、有意差をボンフェローニ補正して使用する。

対応のない、母分散未知の標本データ（9−4. 参照）の検定統計量は、 $T = (\bar{x}_i - \bar{x}_j) / (U_i^2 / n_i + U_j^2 / n_j)$ で、t 分布に従う。

ただし、$\bar{x}_i$: 群 i のデータの平均、U_i : 群 i のデータの不偏分散、n_i : 群 j のデータ数

群 i と群 j に関わる自由度 $f_{i-j} = (U_i^2 / n_i + U_j^2 / n_j)^2 / \{ (U_i^2 / n_i)^2 / (n_i - 1) + (U_j^2 / n_j)^2 / (n_j - 1) \}$

の値に最も近い整数

（表28）群ごとのデータ

	群1	群2	群3
1	7	10	9
2	10	9	6
3	7	9	7
4	8	10	8
5	9	12	
6	7		
データ数	6	5	4
平均	8	10	7.5
不偏分散	1.60	1.95	1.67

（表28）の標本データをもとに検定統計量を計算する。

群 1 と群 2 の母平均の差の検定統計量 $T_{1-2} = (8 - 10) / (1.60/6 + 1.95/5) = -2.47$

群 2 と群 3 の母平均の差の検定統計量 $T_{2-3} = (10 - 7.5) / (1.95/5 + 1.67/4) = 2.78$

群 3 と群 1 の母平均の差の検定統計量 $T_{3-1} = (7.5 - 8) / (1.67/4 + 1.60/6) = -0.60$

T_{1-2} の自由度 $f_{1-2} = (1.60/6 + 1.95/5)^2 / ((1.60/6)^2 / (6 - 1) + (1.95/5)^2 / (5 - 1)) = 8.25 \rightarrow 8$

T_{2-3} の自由度 $f_{2-3} = (1.95/5 + 1.67/4)^2 / ((1.95/5)^2 / (5 - 1) + (1.67/4)^2 / (4 - 1)) = 6.79 \rightarrow 7$

T_{3-1} の自由度 $f_{3-1} = (1.67/4 + 1.60/6)^2 / ((1.67/5)^2 / (4 - 1) + (1.60/6)^2 / (6 - 1)) = 6.47 \rightarrow 6$

検定回数 N = 3， ボンフェローニに補正に従って、有意差は α ／ N = 0.05 ／ 3 = 0.0167

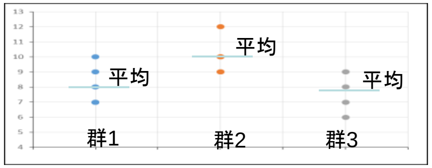
自由度 8 の t 分布の下側棄却域の統計量は、$t_{0.0167}$ (8) = T.INV (0.0167, 8) = − 2.56

自由度 8 の t 分布の上側棄却域の統計量は、$t_{0.9833}$ (8) = T.INV (0.0167, 8) = 2.56

同様に、$t_{0.0167}$ (7) = − 2.64 , $t_{0.9833}$ (7) = 2.64 , $t_{0.0167}$ (6) = − 2.75 , $t_{0.9833}$ (6) = 2.75

従って、

- $-2.56 < (T_{1-2} = -2.47) < 2.56$ → 帰無仮説は棄却されず、受容される（群 1 と群 2 の平均に差はない）。
  なお、下側棄却域 T_{1-2} の p 値 = T.DIST (− 2.47, 8, true) = 0.0194 ＞ 0.0167
- $2.64 < (T_{2-3} = 2.78)$ → 帰無仮説は棄却される（群 2 と群 3 の平均に差はある）。
  なお、上側棄却域 T_{2-3} の p 値 = 1− T.DIST (2.78, 7, true) = 0.0194 ＞ 0.0167 = 0.0136 ＜ 0.0167
- $-2.75 < (T_{3-1} = -0.60) < 2.75$ → 帰無仮説は棄却されず、受容される（群 3 と群 1 の平均に差はない）。
  なお、下側棄却域 T_{3-1} の p 値 = T.DIST (− 0.60, 6, true) = 0.2837 ＞ 0.0167



（図47）群データの分布状況

付録1. 転置行列の応用(1/2)

定義に転置行列を使う行列に関して整理する(別途資料「生産技術、現代制御理論の基礎知識」付録を参照)。

(1)転置行列

・定義: 行列 $A = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \cdots, n \quad j = 1, 2, \cdots, m)$ に対して、$A^T = (a_{ji})$ を行列 A の転置行列という。

・性質: 行列 A, 行列 B とも n × n の正方行列であるとする。 また、c は定数である。

1) $(A^T)^T = A$ ・・・ ①

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$ ・・・ ②

3) $(c\,A)^T = c\,A^T$ ・・・ ③

4) $(A\,B)^T = B^T A^T$ ・・・ ④

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

(2)対称行列

・定義: 行列 A の転置行列と行列 A が等しいとき、つまり、$A^T = A$ のとき、行列 A を対称行列という。

(3)直交行列

・定義: 行列 A の転置行列と行列 A の逆行列が等しいとき、つまり、$A^T = A^{-1}$ のとき、行列 A を直交行列という。

・性質: 行列 A が直交行列のとき、$A\,A^T = A\,A^{-1} = I$ (単位行列) である。

特に、内積に関する式変形をまとめておく。

ベクトル $x = (x_i) = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^T$, ベクトル $y = (y_i) = [y_1 \;\; y_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^T$ とする。

ベクトル x とベクトル y の内積の定義: $\langle x\,, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

(4)内積と転置行列

1) $\langle x\,, y\rangle = x^T y$ (この式は、内積の定義そのものである) ・・・ ⑤

2) $\langle A\,x\,, y\rangle = \langle x\,, A^T y\rangle$ ・・・ ⑥

(確認) ⑤ より、$\langle A\,x\,, y\rangle = (A\,x)^T y$

行列 A が転置行列であれば、④ より、$(A\,x)^T y = x^T A^T y = x^T (A^T y)$, ⑤より、$x^T (A^T y) = \langle x\,, A^T y\rangle$

(5)内積と対称行列

1) $\langle A\,x\,, y\rangle = \langle x\,, A\,y\rangle$ ・・・ ⑦

(確認) ⑥ より、$\langle A\,x\,, y\rangle = \langle x\,, A^T y\rangle$

行列 A が対称行列であれば、(2)より、$\langle x\,, A^T y\rangle = \langle x\,, A\,y\rangle$

(6)内積と直交行列

1) $\langle A\,x\,, A\,y\rangle = \langle x\,, y\rangle$ ・・・ ⑧

(確認) ⑥ より、$\langle A\,x\,, A\,y\rangle = \langle x\,, A^T A\,y\rangle$

行列 A が直交行列であれば、(3)より、$\langle x\,, A^T A\,y\rangle = \langle x\,, A^{-1} A\,y\rangle = \langle x\,, y\rangle$

付録1．転置行列の応用（2/2）

（1）行列の要素が全て実数である実対称行列の固有値は実数である。

実対称行列 A の固有値が実数であるとは、固有値 λ が λ の共役複素（λ^* と表記）と等しくなる（$\lambda = \lambda^*$）、つまり虚数項を持たないということである。
（$\lambda = a + j\,b$（j は虚数）としたとき、λ の共役複素数は $\lambda^* = a - j\,b$ であり、$\lambda = \lambda^*$ であるには、$b = 0$ と虚数項を持たない、ということ）。

（確認）

$\lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle = \langle \lambda\,\mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle$,　行列 A の固有方程式（注1）を代入して、$\langle \lambda\,\mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle = \langle \mathbf{A}\,\mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle$,　行列 A は対称行列なので ⑦ より、$\langle \mathbf{A}\,\mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\,\mathbf{x}^*\rangle$

そして、行列 A は実対称行列なので $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ より、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\,\mathbf{x}^*\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^*\,\mathbf{x}^*\rangle$,　（注2）より、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^*\,\mathbf{x}^*\rangle = \langle \mathbf{x}, (\mathbf{A}\,\mathbf{x})^*\rangle$　ここで行列 A の固有方程式を使って、

$\langle \mathbf{x}, (\mathbf{A}\,\mathbf{x})^*\rangle = \langle \mathbf{x}, (\lambda\,\mathbf{x})^*\rangle$,　そして、（注2）より、$\langle \mathbf{x}, (\lambda\,\mathbf{x})^*\rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda^*\,\mathbf{x}^*\rangle = \lambda^*\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle$

まとめると、$\lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle = \lambda^*\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle$,　よって、$(\lambda - \lambda^*)\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle = 0$

ここで、内積の定義より、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,x_i^* = \sum_{i=1}^{n} |\,x_i\,|^2 > 0$ であるので、$\lambda = \lambda^*$ となる。 つまり、実対称行列の固有値は実数であることが分かる。

（注1）行列の固有値

$n \times n$ の正方行列 A に対して固有方程式 $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$ を満たす λ が存在するとき、λ は行列 A の特性を表すパラメータであり、固有値と呼ばれる。
固有値 λ は固有方程式から導かれる。λ は、固有方程式 $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ において、$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ としたときの特性方程式 $|\,\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}\,| = 0$ の解である。
また、固有値 λ が求まれば既知の行列 A を固有方程式に代入して ベクトル x が求まる。このベクトル x を固有値 λ に対する固有ベクトルという。

（注2）共役複素数の性質

複素数　$\alpha = a + j\,b$　（a, b は実数、j は虚数）の共役複素数は、$\alpha^* = a - j\,b$　である。
複素数　$\beta = c + j\,d$　（c, d は実数、j は虚数）の共役複素数は、$\beta^* = c - j\,d$　である。

1）$(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*$　　（確認）$((a + j\,b) + (c + j\,d))^* = (a + j\,b)^* + (c + j\,d)^* = (a - j\,b) + (c - j\,d) = \alpha^* + \beta^*$

2）$(\alpha\,\beta)^* = \alpha^*\,\beta^*$　　（確認）$((a + j\,b)\,(c + j\,d))^* = ((a\,c - b\,d) + j\,(a\,d + b\,c))^* = (a\,c - b\,d) - j\,(a\,d + b\,c) = (a - j\,b)\,(c - j\,d) = (a + j\,b)^*\,(c + j\,d)^*$

（2）実対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは、互いに直交する。

ベクトルが互いに直交するとは、ベクトルの内積が 0 になる、ということである。

（確認）

実対称行列 A の固有値を α, β（$\alpha \neq \beta$）とすると、固有方程式は $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{x}$,　$\mathbf{A}\,\mathbf{y} = \beta\,\mathbf{y}$　（$\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$）となる。

$\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \alpha\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{A}\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$,　⑥ より、$\langle \mathbf{A}\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^T\,\mathbf{y}\rangle$,　行列 A は実対称行列　$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

よって、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^T\,\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\,\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \beta\,\mathbf{y}\rangle = \beta\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$

まとめると、$(\alpha - \beta)\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$,　ここで、$\alpha \neq \beta$ であるので、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$,　つまり、異なる固有値の固有ベクトルは直交することが分かる。

（3）実対称行列は直交行列を使って対角化することができる。

対角化できるとは、対角要素以外の全ての要素が 0 である対角行列に変換できる、ということである。

（確認）

実対称行列 A の異なる固有値を λ_i とすると、この固有値に対応した固有ベクトル $\mathbf{T} = (\mathbf{x}_i) = [\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{x}_n]$ からなる変換行列 T を使用して、
実対称行列 A の固有値 λ_i を対角要素とする対角行列 Λ に変換することができる。

$$\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T} = [\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{x}_n]^{-1}\,\mathbf{A}\,[\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{x}_n] = [\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{x}_n]^{-1}\,[\mathbf{A}\,\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{A}\,\mathbf{x}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n] = [\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{x}_n]^{-1}\,[\lambda_1\mathbf{x}_1\ \ \lambda_2\,\mathbf{x}_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n\,\mathbf{x}_n]$$

$$= [\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{x}_n]^{-1}\,[\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{x}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda \quad \cdots\ （付式1）$$

そして、この変換行列 T は、上記（2）により直交行列であることが分かる。 つまり、実対称行列は直交行列を使って対角化できることが分かる。

付録2．2次形式(quadratic form)

（1）2次形式の標準形

係数が実数の多項式で全ての項が2次の項であるものを2次形式という（別途資料「生産技術、現代制御理論の基礎知識」付録を参照）。

この2次形式の多項式 $f(\mathbf{x})$ は、実対称行列 $\mathbf{A}$ とベクトル $\mathbf{x}$ を使用して表すことができる。

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j = \sum_{i=j} c_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i<j} c_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i>j} c_{ij}\, x_i\, x_j = \sum_{i=j} c_{ii}\, x_i^2 + \sum_{i<j} c_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i<j} c_{ji}\, x_j\, x_i = \sum_{i=j} c_{ii}\, x_i^2 + \sum_{i<j} (c_{ij} + c_{ji})\, x_i\, x_j$$

ここで、行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ を実対称行列として、$a_{ij} = c_{ii}$ ($i = j$ のとき), $a_{ij} = (1/2)(c_{ij} + c_{ji})$ ($i \neq j$ のとき)とおくと、

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum a_{ii}\, x_i^2 + \sum 2\, a_{ij}\, x_i\, x_j = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{A}\, \mathbf{X} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\, \mathbf{x} \rangle \quad \cdots \text{（付式2）}$$

つまり、2次形式の多項式は、実対称行列を使用して内積の形で表すことができる。

ところで、行列 $\mathbf{A}$ は実対称行列であるので（付式1） $\mathbf{T}^{-1}\, \mathbf{A}\, \mathbf{T} = \Lambda$ を満たす直交行列 $\mathbf{T}$ が存在する（行列 Λ の対角成分は行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ_i）。

直交行列の定義より、$\mathbf{T}\,\mathbf{T}^T = \mathbf{I}$ であること、そして転置行列の内積の式変形 ⑥ を利用して、

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, (\mathbf{T}\,\mathbf{T}^T)\, \mathbf{A}\, (\mathbf{T}\,\mathbf{T}^T)\, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{T}\, (\mathbf{T}^T \mathbf{A}\, \mathbf{T})\, \mathbf{T}^T \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{T}\, \Lambda\, \mathbf{T}^T \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{T}^T \mathbf{x}, \Lambda\, \mathbf{T}^T \mathbf{x} \rangle$$

ここで、新しいベクトル $\mathbf{y} = \mathbf{T}^T \mathbf{x}$ を導入すると、

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \Lambda\, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1\, y_1^2 + \lambda_2\, y_2^2 + \cdots + \lambda_n\, y_n^2 \qquad \cdots \text{（付式3）}$$

このようにして、任意の2次形式の多項式 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\, \mathbf{x} \rangle$ を、行列 $\mathbf{A}$ の固有値を係数とする2乗項だけの2次形式の多項式（2次形式の標準形） $\langle \mathbf{y}, \Lambda\, \mathbf{y} \rangle$ に変換できることが分かる（なお、ベクトル $\mathbf{y}$ の大きさ（ノルム）が 1 になるようにさらに変換した形式を、通常は2次形式の標準形という）。

多項式が図形を表すと考えたとき、この直交行列を使用した変換は、直交する固有ベクトルの座標軸で元の図形を捉え直す変換である、つまり図形の回転をという変換であり、この変換で図形の形は変わらない。

（例）

対称行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ のとき、（付式2）で表される多項式は $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\, \mathbf{x} \rangle = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3\, x_1 + x_2 \\ x_1 + 2\, x_2 \end{bmatrix} = 3\, x_1^2 + 2\, x_1\, x_2 + 2\, x_2^2$ ・・・（付式4）

一方、行列 $\mathbf{A}$ の固有値は、$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 2) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$ より、固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2 = (5 \pm 5^{1/2}) / 2 > 0$

よって、（付式4）を（付式3）で表される標準形の2次形式に変換すると、$\langle \mathbf{y}, \Lambda\, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1\, y_1^2 + \lambda_2\, y_2^2 = ((5 + 5^{1/2}) / 2)\, y_1^2 + ((5 - 5^{1/2}) / 2)\, y_2^2$ ・・・（付式5）

この 2 変数の式（付式4）と（付式5）はそれぞれ楕円を表す式になっており、この変換では図形の形は保持されることが確認できる（付録3）。

（2）正定行列（定義）

任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して、内積 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle \geqq 0$ のとき、この対称行列 $\mathbf{A}$ は半正定行列であるという。

また、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\, \mathbf{x} \rangle > 0$ のとき、この対称行列 $\mathbf{A}$ は正定行列で あるという。

（3）対称行列の全ての固有値が正であれば、その対称行列は正定行列である（逆も成立する）。

対称行列 $\mathbf{A}$ の固有値を λ_i としたとき、（付式3）の多項式は全ての係数 $\lambda_i > 0$ のときに限って、（付式3）> 0 となることが分かる。

つまり、対称行列の固有値が全て正であれば、その対称行列は正定行列になることが分かる。

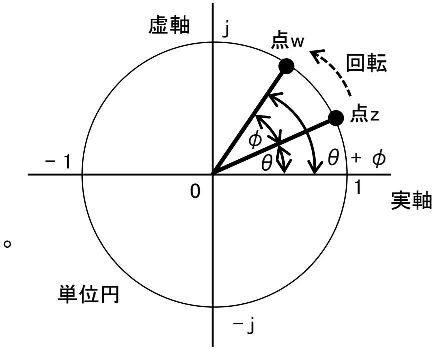
（例）

対称行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ のとき、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\, \mathbf{x} \rangle = 3\, x_1^2 + 2\, x_1\, x_2 + 2\, x_2^2 = 2\, x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \geqq 0$

そして、ベクトル $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のときに限って、上式は 0 となるので、全ての固有値が正の対称行列 $\mathbf{A}$ は正定行列であることが確認できる。

付録3. 図形の回転

参考：「正弦・余弦の加法定理」
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$



（付図1）点の回転

■点の回転（付図1）

点の回転は、複素数の積で表される。 ここでは、単位円上で考える。

$z=\cos\theta+j\sin\theta$ で表される座標の点 z を、角度 ϕ ラジアン 回転させた点 w の座標は（付式6）で表すことができる。

$w=\cos(\theta+\phi)+j\sin(\theta+\phi)=(\cos\theta+j\sin\theta)(\cos\phi+j\sin\phi)$ ・・・ （付式6）

（確認）

（付式6）の右辺を、正弦・余弦の加法定理（本頁の右上）を使用して変形すると（付式6）の左辺が得られる。

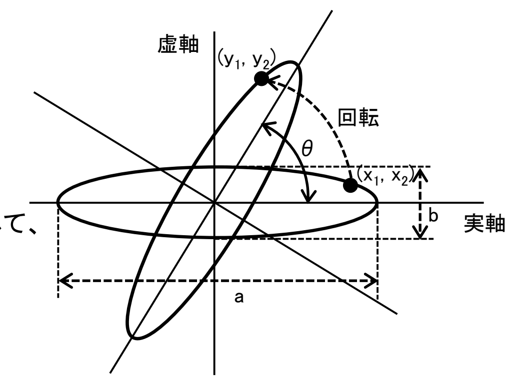
$w=(\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)+j(\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi)=\cos(\theta+\phi)+j\sin(\theta+\phi)$ ・・・ （付式7）

（付式7）より、点 z を角度 ϕ 回転すると点 w になることが分かる。

■楕円の回転（付図2）

長径（長さ a）と短径（長さ b）が x 軸、y 軸上にある楕円の方程式は（付式8）で表される。

$x_1 / a^2 + x_2^2 / b^2 = 1$ ・・・ （付式8）



（付図2）楕円の回転

一方、（付式9）の楕円は、（付式8）の楕円を角度 θ ラジアン回転させた楕円であると考える。

言い換えれば、（付式8）の楕円は、（付式9）の楕円を角度 $-\theta$ ラジアン回転させた図形であると考える。

$A y_1^2 + B y_1 y_2 + C y_2^2 = 1$ （付式9）

（付式9）の楕円の式の定数 A , B , C を（付式8）の楕円の式の定数 a , b を使って表す。まず、（付式6）を使用して、

$x_1 + x_2 = (y_1 + j y_2)(\cos(-\theta) + j\sin(-\theta))$

$= (y_1 + j y_2)(\cos\theta - j\sin\theta) = (y_1\cos\theta + y_2\sin\theta) + j(-y_1\sin\theta + y_2\cos\theta)$

よって、実部と虚部を比較して、

$x_1 = y_1\cos\theta + y_2\sin\theta,\quad x_2 = -y_1\sin\theta + y_2\cos\theta$ ・・・ （付式10）

（付式10）を（付式8）に代入した結果が（付式9）に等しい。 つまり、

$x_1/a^2 + x_2^2/b^2 = (y_1\cos\theta + y_2\sin\theta)^2 / a^2 + (-y_1\sin\theta + y_2\cos\theta)^2 / b^2$

$= \{(\cos\theta)^2/a^2 + (\sin\theta)^2/b^2\} y_1^2 + \{(2\cos\theta\sin\theta)/a^2 - (2\sin\theta\cos\theta)/b^2\} y_1 y_2 + \{(\sin\theta)^2/a^2 + (\cos\theta)^2/b^2\} y_2^2$

この式と（付式9）を比較して、また、正弦・余弦の定理を使って、（付式8）の楕円の係数 a^2 , b^2 と回転角 θ が与えられたとき、係数 A, B, C が求まる。

$A = (\cos\theta)^2/a^2 + (\sin\theta)^2/b^2$

$B = (2\cos\theta\sin\theta)/a^2 - (2\sin\theta\cos\theta)/b^2 = 2\cos\theta\sin\theta(1/a^2 - 1/b^2) = \sin(2\theta)(1/a^2 - 1/b^2)$

$C = (\sin\theta)^2/a^2 + (\cos\theta)^2/b^2$

（例）（付録2）の（付式5）で表される楕円を回転して（付式4）で表される楕円になることを確認する。

$A = (\cos\theta)^2/a^2 + (\sin\theta)^2/b^2 = \{(5+5^{1/2})/2\}(\cos\theta)^2 + \{(5-5^{1/2})/2\}(\sin\theta)^2 = 5/2 + (5^{1/2}/2)((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2) = 5/2 + (5^{1/2}/2)\cos(2\theta)$

$B = \sin(2\theta)(1/a^2 - 1/b^2) = (\sin 2\theta)\{(5+5^{1/2})/2 - (5-5^{1/2})/2\} = 5^{1/2}\sin(2\theta)$

$C = (\sin\theta)^2/a^2 + (\cos\theta)^2/b^2 = \{(5+5^{1/2})/2\}(\sin\theta)^2 + \{(5-5^{1/2})/2\}(\cos\theta)^2 = 5/2 + (5^{1/2}/2)((\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2) = 5/2 - (5^{1/2}/2)\cos(2\theta)$

ここで、$\sin(2\theta) = 2/5^{1/2}$ となるように θ を選べば、つまり、$\theta = 0.554$ ラジアン（31.7 度）回転させれば、

$A = 5/2 + (5^{1/2}/2)\cos(2\theta) = 5/2 + (5^{1/2}/2)(1-(\sin(2\theta))^2)^{1/2} = 5/2 + (5^{1/2}/2)(1-(2/5^{1/2})^2)^{1/2} = 5/2 + (5^{1/2}/2)(1/5^{1/2}) = 5/2 + 1/2 = 3$

$B = 5^{1/2}\sin(2\theta) = 5^{1/2}(2/5^{1/2}) = 2$

$C = 5/2 - (5^{1/2}/2)\cos(2\theta) = 5/2 - (5^{1/2}/2)(1-(\sin(2\theta))^2)^{1/2} = 5/2 - (5^{1/2}/2)(1-(2/5^{1/2})^2)^{1/2} = 5/2 - (5^{1/2}/2)(1/5^{1/2}) = 5/2 - 1/2 = 2$

このようにして、（付式5）から（付式4）が求まる（逆も成り立つ）。

付録4．多変数のガウス積分

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$（2 次関数）のとき、$\exp(-f(x))$ の積分の値を求める。

$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(f(x))\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(a\,x^2 + b\,x + c))\,dx$　（但し、$a > 0$）

この指数関数の積分の値は（付式１１）で表される（別途資料「いろいろな確率分布」付録を参照）。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(a\,x^2 + b\,x + c))\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(a(x + b/(2\,a))^2 - b^2/(4\,a) + c))\,dx = \exp(-(b^2/(4\,a) - c)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a(x + b/(2\,a))^2)\,dx = \{\exp(-(b^2/(4\,a) - c))\}\,(\pi/a)^{1/2} \quad \cdots\text{（付式１１）}$$

この $f(x)$ を多変数 $f(\mathbf{x})$（$\mathbf{x}$ はベクトル）に拡張する。この多変数のガウス積分の式が（付式１２）である。ここでは、この積分の値を求める。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-f(\mathbf{x}))\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-1/2\,\mathbf{x}^T \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c)\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_n \quad \cdots\text{（付式１２）}$$

ただし、多変数ベクトル $\mathbf{x} = (x_i)$，$a_{ij} = a_{ji}$ である対称行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$，ベクトル $\mathbf{b} = (b_i)$，定数 c

（1）まず、$\mathbf{A}^2$ と $\mathbf{A}^{1/2}$ を求める。

対称行列 $\mathbf{A}$ は直交行列 $\mathbf{U}$ を使って、$\mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ と対角化（行列 $\mathbf{\Lambda}$ は対角要素に行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ_i を持ち、他の要素は全て 0 の対角行列）できるので（付録1）、

$\mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \;\rightarrow\; \mathbf{U}(\mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}) = \mathbf{U}\,\mathbf{\Lambda} \;\rightarrow\; \mathbf{A}\,\mathbf{U} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Lambda} \;\rightarrow\; (\mathbf{A}\,\mathbf{U})\,\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}\,\mathbf{\Lambda})\,\mathbf{U}^{-1} \;\rightarrow\; \mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{U}^{-1}$

従って、 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\,\mathbf{A} = (\mathbf{U}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{U}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\begin{bmatrix}\lambda_1^{\,2} & 0 & \cdot & 0\\ 0 & \lambda_2^{\,2} & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n^{\,2}\end{bmatrix}\mathbf{U}^{-1}$， 同様に、$\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{U}\begin{bmatrix}\lambda_1^{\,1/2} & 0 & \cdot & 0\\ 0 & \lambda_2^{\,1/2} & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n^{\,1/2}\end{bmatrix}\mathbf{U}^{-1}$

なお、$\mathbf{A}^{1/2}$ の妥当性は以下で確認できる。 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{1/2}\,\mathbf{A}^{1/2} = \left(\mathbf{U}\begin{bmatrix}\lambda_1^{\,1/2} & 0 & \cdot & 0\\ 0 & \lambda_2^{\,1/2} & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n^{\,1/2}\end{bmatrix}\mathbf{U}^{-1}\right)\left(\mathbf{U}\begin{bmatrix}\lambda_1^{\,1/2} & 0 & \cdot & 0\\ 0 & \lambda_2^{\,1/2} & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n^{\,1/2}\end{bmatrix}\mathbf{U}^{-1}\right) = \mathbf{U}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdot & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n\end{bmatrix}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}$

（2）まず、（付式１１）に倣って $f(\mathbf{x})$ の式変形を行う。そのために、行列 $\mathbf{A}$ が対称行列で、$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ であることに注意して、下式を用意する。

$$\begin{aligned}-1/2\,(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b})^T(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b}) &= -1/2\,(\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^{1/2})^T - \mathbf{b}^T(\mathbf{A}^{-1/2})^T)(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b}) = -1/2\,(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^{1/2} - \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1/2})(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b})\\ &= -1/2\,(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b} - \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b}) = -1/2\,(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})\\ &= -1/2\,\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} - 1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

よって、$f(\mathbf{x}) = -1/2\,\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = -1/2\,(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b})^T(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b}) + 1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c$

（3）求めた $f(\mathbf{x})$ を（付式１２）に代入して、ガウス積分の値を求める。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(f(\mathbf{x}))\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-1/2\,(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b})^T(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b}) + 1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n\\ &= \exp(1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-1/2\,(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b})^T(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b}))\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n\end{aligned}$$

ここで、$\mathbf{y} = \mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b}$ とおくと、$\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b} \;\rightarrow\; \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \;\rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{y} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

従って、ヤコビアンは、$J(\mathbf{y}) = |\partial\mathbf{x} / \partial\mathbf{y}| = |\mathbf{A}^{-1/2}|$　（ヤコビアンに関しては、別途資料「いろいろな確率分布」付録を参照）

なお、行列 $\mathbf{A}$ が正定行列であれば、行列式 $|\mathbf{A}| \neq 0$ が満たされ、ヤコビアンは存在する。何故なら、対称行列が正定行列であれば正の固有値を持ち、この対称行列を対角化すれば対角要素が正の固有値で他の要素は全て 0 の対角行列になる（付録2）。この行列の行列式の値は正になる（0 にならない）。

多変数のガウス積分は、1 変数のガウス積分の積として求めることができる。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(f(\mathbf{x}))\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n &= \exp(1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-1/2\,(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b})^T(\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{b}))\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n\\ &= \exp(1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-1/2\,\mathbf{y}^T\mathbf{y})\,|\mathbf{A}^{-1/2}|\,dy_1\,dy_2\cdots dy_n = |\mathbf{A}^{-1/2}|\exp(1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-1/2\,\mathbf{y}^T\mathbf{y})\,dy_1\,dy_2\cdots dy_n\\ &= |\mathbf{A}^{-1/2}|\exp(1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-1/2\,y_1^2)\,dy_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-1/2\,y_2^2)\,dy_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-1/2\,y_n^2)\,dy_n = |\mathbf{A}^{-1/2}|\exp(1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c)\,(2\pi)^{n/2}\\ &= ((2\pi)^n / |\mathbf{A}|)^{1/2}\exp(1/2\,\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c)\end{aligned}$$

付録5．p値の誤解

p 値が有意水準 α より小さくなるように、つまり帰無仮説を棄却できるように、p 値を操作することを、p-hacking という。
そこで、p-hacking を防止するために、また、意図せずとも p 値が小さくなってしまうような誤った操作をしてしまうことがないように、加えて、p 値に関する様々な誤解があることを危惧し、ASA(American Statistical Association)は、p 値に関する適正な使用と解釈に関する声明を発表している（2017年）。
ここでは、「統計的有意性と p 値に関する ASA 声明」（京都大学、日本計量学会 佐藤俊哉）をもとに、ASA の声明を要約しておく。

p 値の適正な使用と解釈に関する6つの原則

1）p 値はデータと特定の統計モデルが矛盾する程度を示す指標のひとつである。
検定で使用するデータがランダムサンプリングされたものであるという条件は、検定統計量の前提条件として使用する帰無仮説と同じく統計モデルを構成する要件である。p 値が小さくなる原因は帰無仮説に問題があるからだけでなく、サンプリング方法を含めて統計モデルに問題がある場合も考えられる。

2）p 値は、調べている仮説が正しい確率や、データが偶然のみで与えられた確率を測るものではない。
p 値は仮説に基づいた計算結果であり、仮説そのものを表すものではない。

3）科学的な結論や、ビジネス、政策における決定は、p 値が有意水準を越えたかどうかにのみ基づくべきではない。
有意水準をもとに二分割された片側の結論が正しく、もう片側が誤りだと判断してはならない。
データの測定方法とか仮説の妥当性なども考慮すべきである。

4）適切な推測のためには、すべてを報告する透明性が必要である。
複数のデータ解析を実施してそのなかから特定の p 値のみを選択して報告してはならない。計算した全ての p 値を開示すべである。

5）p 値や統計的有意性は、効果の大きさやその結果の重要性を意味しない。
サンプルサイズが変われば p 値も変わる。サンプルサイズが大きくなれば p 値は小さな値になる（従って、サンプルサイスの決め方が重要になる）。
p 値が小さくても、必ずしも大きな効果があることを意味しない。また逆に、p 値が大きいからと言って直ちに効果がないということを意味しない。

6）p 値は、それだけでは統計モデルや仮説に関するエビデンスの良い指標とはならない。
p 値のもたらす情報は限定的である。判断には「過誤」を伴う。データ解析の背景などを把握する必要がある。
つまり、p 値を計算しただけでデータ解析を終えてはならない。

付録6．サンプルサイズの算出

母分散が既知の正規分布の母平均を検定する場合（5−1．参照）を例にして、検定に必要なサンプルサイズを決める手順を示す。帰無仮説を母平均 $\mu = \mu_0$（特定の値）とし、対立仮説が正しいときに帰無仮説を検出力 $1-\beta$（β は第2の過誤）で棄却したいときのサンプルサイズ n を求める。

帰無仮説 $\mu = \mu_0$ が成り立つときの検定統計量 T_0 は、既知の母分散を σ_0^2 、標本平均を $\bar{x}$ として、

$T_0 = (\bar{x} - \mu_0) / (\sigma_0 / n^{1/2})$ ・・・（付式13）

となり、T_0 は標準正規分布に従う（5−1．参照）。
帰無仮説が棄却されるのは、両側検定で $|T_0| \geqq z_{\alpha/2}$（α は有意水準） を満たすときである（別途資料「統計的推定の手順」付録を参照）。

$T_0 = (\bar{x} - \mu) / (\sigma_0 / n^{1/2}) + (\mu - \mu_0) / (\sigma_0 / n^{1/2}) = T + (\mu - \mu_0) / (\sigma_0 / n^{1/2})$　但し、$T = (\bar{x} - \mu) / (\sigma_0 / n^{1/2})$ ・・・（付式14）

ここで、T は（付式13）と同じく、標準正規分布に従う。
（付式14）は、標準正規分布 T を横軸方向に $(\mu - \mu_0) / (\sigma_0 / n^{1/2})$ シフトした分布が T_0 の分布であることを示すもので、
T_0 は、平均 $(\mu - \mu_0) / (\sigma_0 / n^{1/2}) = \Delta n^{1/2}$, 分散 = 1 の正規分布に従うことが分かる。但し、効果量 $\Delta = (\mu - \mu_0) / \sigma_0$（定義、本文3．を参照）である。
従って、帰無仮説が成立するとき、帰無仮説が棄却される確率は、P (x) が事象 x の確率を表す表記方法だとして、

$P(|T_0| \geqq z_{\alpha/2}) = P(|T + \Delta n^{1/2}| \geqq z_{\alpha/2}) = P(T \leqq -z_{\alpha/2} - \Delta n^{1/2}) + P(T \geqq z_{\alpha/2} - \Delta n^{1/2})$

この条件を満たす検定統計量は、対立仮説が正しいときに帰無仮説を棄却する検定統計量でもある。そして、検出力 $1-\beta$ を決める検定統計量になる。

$1 - \beta = P(T \leqq -z_{\alpha/2} - \Delta n^{1/2}) + P(T \geqq z_{\alpha/2} - \Delta n^{1/2}) = P(T \geqq z_{\alpha/2} - \Delta n^{1/2})$

この式変形では、分布の左側の確率である $P(T \leqq -z_{\alpha/2} - \Delta n^{1/2})$ は極めて小さな値をとるとして無視している。従って、上式は、$z_{1-\beta} = z_{\alpha/2} - \Delta n^{1/2}$ のように表すことができるので、

$n = \{(z_{\alpha/2} - z_{1-\beta}) / \Delta\}^2$

となり、有意水準 α と検定力 $1-\beta$ と効果量 Δ を設定すれば、検定に必要なサンプルサイズ n を求めることができることが分かる。

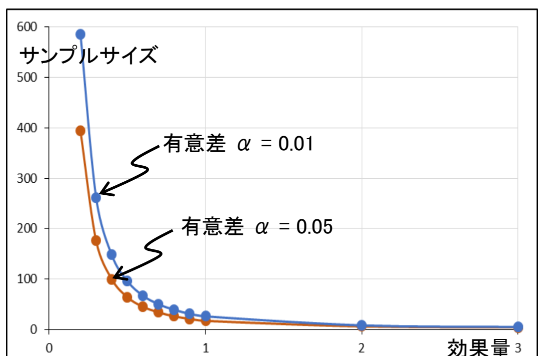
■G*Power

ハインリッヒ・ハイネ大学（ドイツ）は、検定の種類に合わせて必要とされるサンプルサイズを計算するG*Power というソフトウェアを無料公開（下記のURL）しており、ダウンロードして使用できる。
URL： Universität Düsseldorf: G*Power (hhu.de)

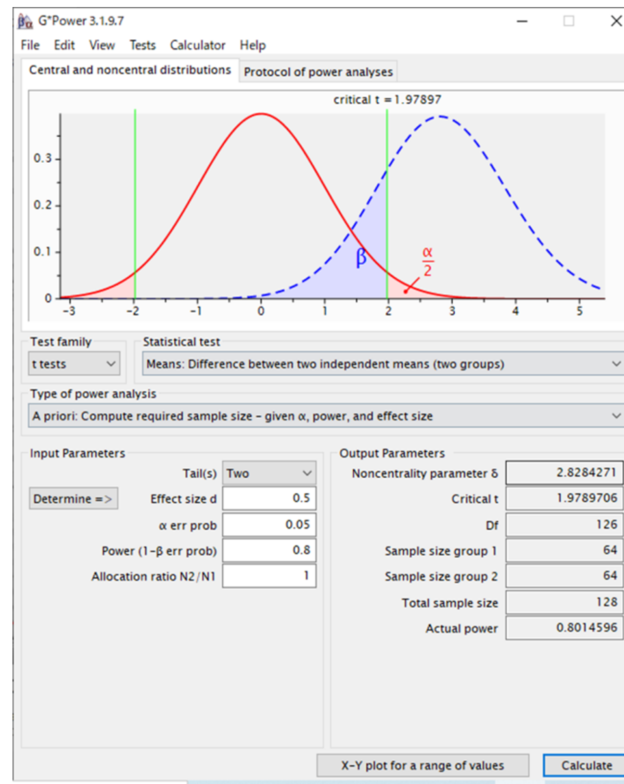
G*Power は、検定前に検定に必要なサンプルサイズを求めるときに使用できるだけでなく、検定後に検定の性能を確認するために検出力や効果量を確認するためにも使用できる。

（使用例）

対応のない 2 群の t 検定を行うときに（検定前に）必要なサンプルサイズを、G*Power （付図3）に示すように求めることができる。
有意水準は、α = 0.05 と 0.01 の2種類、
検出力は 0.8 として、
効果量と必要なサンプルサイズの関係を求めた。
結果を（付図4）に示す。効果量が大きくなると、当然のことだがサンプルサイズは小さくて済むことが分かる。



（付図4）効果量とサンプルサイズの関係
（対応のない t 検定）



（付図3）G*Power

付録7．単回帰式の導出

n 組の実測データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ があるとき、x_i と y_i との間に線形関係（単回帰式）を想定し、x_i の値を使って y_i の予測値 $\hat{y}_i$ を求めることを考える。

$\hat{y}_i = \alpha + \beta x_i$　・・・（付式15）

但し、 x_i：変数（説明変数）、y_i：x_i に対応した実測値（目的変数）、 $\hat{y}_i$：x_i に対応した予測値、 α，β：定数

予測値の誤差は、$\hat{y}_I - y_i$ で表される。

この誤差の二乗和である、$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$ を最小にする定数 α と β を持つ単回帰式が求めるべき線型関係だとして、最小二乗法（偏微分法）を使って求める。

$$L = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (\alpha + \beta x_i))^2$$

（1）L を α で偏微分して、 $\partial L / \partial \alpha = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = n\alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow 1/n \sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha + \beta (1/n \sum_{i=1}^{n} x_i)$

$\rightarrow \bar{y} = \alpha + \beta \bar{x} \rightarrow \alpha = \bar{y} - \beta \bar{x}$　・・・（付式16）

（2）L を β で偏微分して、 $\partial L / \partial \beta = -2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \alpha - \beta x_i) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (\bar{y} - \beta \bar{x}) \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (\bar{y} - \beta \bar{x})\, n \bar{x} + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \bar{y}\, n \bar{x} - \beta\, n\, \bar{x}^2 + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \bar{y}\, n \bar{x} + \beta (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \bar{x}^2)$

$\rightarrow \beta = (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}) / (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \bar{x}^2)$

ここで、分子は、 $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \bar{x}\bar{y} - n \bar{x}\bar{y} + n \bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} y_i + n \bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y} - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} y_i + n \bar{x}\bar{y}$

$= \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x}\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

分母は、分子の式変形を使って $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i - n \bar{x}\bar{x} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

よって、 $\beta = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = S_{xy} / S_{xx}$　・・・（付式17）

ただし、$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$， $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

（付記） 上記（2）の β は、以下のようにして求めることもできる。

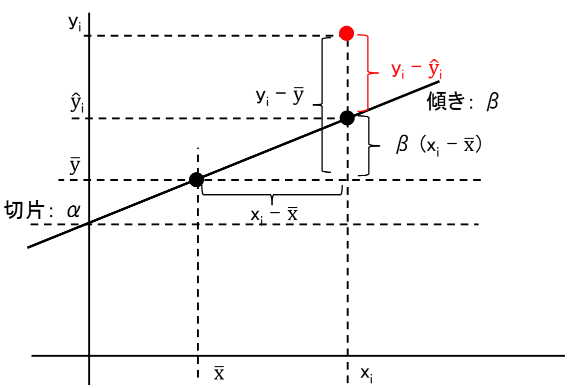
$L = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (\alpha + \beta x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (\bar{y} - \beta \bar{x} + \beta x_i))^2$

$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y} - \beta (x_i - \bar{x}))^2$　・・・ この関係は（付図5）参照のこと

$\partial L / \partial \beta = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y} - \beta (x_i - \bar{x}))$

$= -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + 2\beta \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = -2 S_{xy} + 2\beta S_{xx} = 0$

よって、$\beta = S_{xy} / S_{xx}$



（付図5）回帰係数の求め方

付録8．2群の回帰直線の共通回帰係数

2群の回帰直線が同じ傾き（単回帰係数）を持つとき、この傾きを2群のデータを使って表す。
それぞれの群ごとに群の平均との差（誤差）の平方和を計算し、2つの群の平方和を足した平方和を最小化する単回帰係数を求める。
なお、2つの群のデータを一つにまとめてその平均との差（誤差）の平方和を最小化する単回帰係数を求めると、上記の単回帰係数とは全く異なるものになる（付図6）。

群1のデータ ： $(x_{11}, y_{11}), (x_{12}, y_{12}), \cdots, (x_{1i}, y_{1i}), \cdots, (x_{1m}, y_{1m})$
群2のデータ ： $(x_{21}, y_{21}), (y_{22}, y_{22}), \cdots, (y_{2k}, y_{2k}), \cdots, (x_{2n}, y_{2n})$

それぞれの群のデータの単回帰式は、単回帰係数（傾き） β が等しいとして、

群1のデータの回帰式 ： $y_{1j} = \alpha_1 + \beta x_{1j} + \varepsilon_{1j}$ ただし、α_1 は y 軸切片、ε_{1j} は回帰誤差
群2のデータの回帰式 ： $y_{2k} = \alpha_2 + \beta x_{2k} + \varepsilon_{2k}$ ただし、α_2 は y 軸切片、ε_{2k} は回帰誤差

よって、付録7．の（付記）を参考にして、群1と群2のそれぞれの誤差の平方和（回帰平方和）は、

$$SS_1 = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{1j}^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_{1j} - \alpha_1 - \beta x_{1j})^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_{1i} - \bar{y}_1 - \beta(x_{1i} - \bar{x}_1))^2$$

$$SS_2 = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{2k}^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_{2k} - \alpha_2 - \beta x_{2k})^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_{2k} - \bar{y}_2 - \beta(x_{2k} - \bar{x}_2))^2$$

$SS_1 + SS_2$ を最小にする β つまり、$\partial(SS_1 + SS_2) / \partial\beta = 0$ を満足する β を求める（最小二乗法）。

$$\partial(SS_1 + SS_2) / \partial\beta = \partial SS_1 / \partial\beta + \partial SS_2 / \partial\beta$$

ここで、再び付録7．の（付記）を参考にして、

$$\partial SS_1 / \partial\beta = -2S_{1xy} + 2\beta S_{1xx}$$
$$\partial SS_2 / \partial\beta = -2S_{2xy} + 2\beta S_{2xx}$$

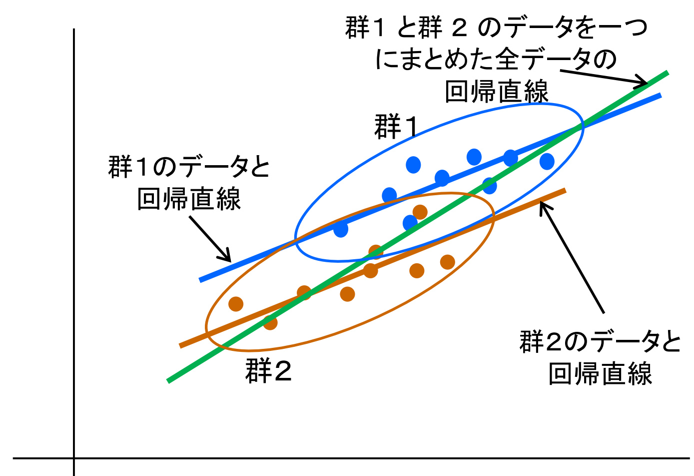
なお、S_{1xy} は群1の x_{1j} と y_{1k} の共分散、 S_{1xx} は群1の x_{1j} の分散
S_{2xy} は群2の x_{2j} と y_{2k} の共分散、 S_{2xx} は群2の x_{2k} の分散

従って、最小二乗法の計算式は、

$$\partial(SS_1 + SS_2) / \partial\beta = (-2S_{1xy} + 2\beta S_{1xx}) + (-2S_{2xy} + 2\beta S_{2xx}) = 0$$

この式を満足する β を求めると、

$$\beta = (S_{1xy} + S_{2xy}) / (S_{1xx} + S_{2xx}) \quad \cdots \text{（付式18）}$$



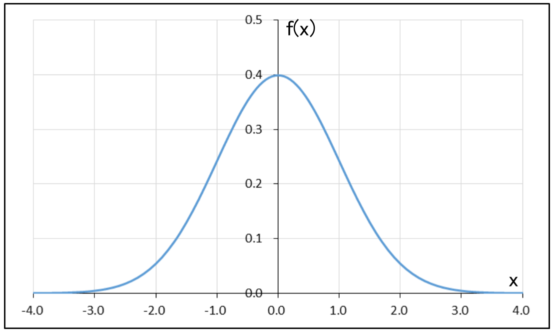
（付図6）回帰直線

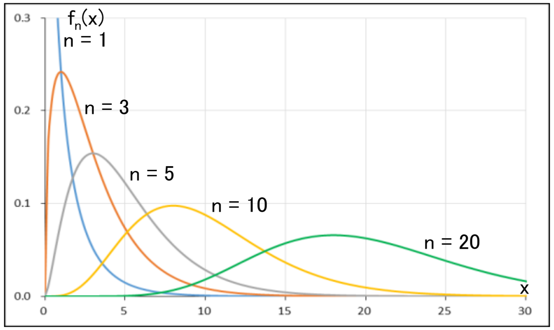
付録9．カイ二乗分布の要約　（別途資料「いろいろな確率分布」参照）

■概要

互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が標準正規分布（$\mu = 0, \sigma^2 = 1$）に従うとき、
確率変数 $X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2$ が従う確率分布を、自由度 n（n は和の数に相当）のカイ二乗分布という。

確率変数 X_i が、標準正規分布に従う	ならば、→	$\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ は、自由度 n のカイ二乗分布に従う





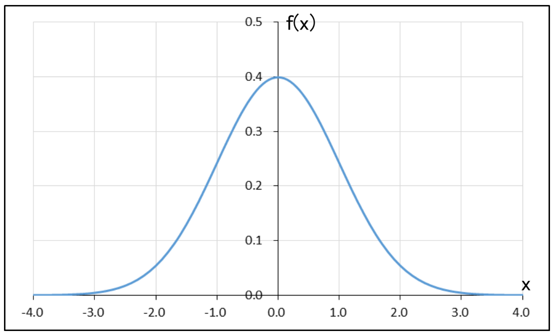
（付図7）カイ二乗分布の導出

付録10．t 分布の要約　（別途資料「いろいろな確率分布」参照）

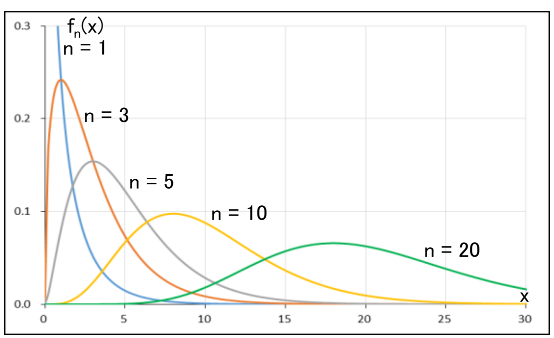
■概要

t 分布は、標準正規分布を自由度を加味したカイ二乗分布でスケーリングした確率分布である。

確率変数 X が、標準正規分布に従う

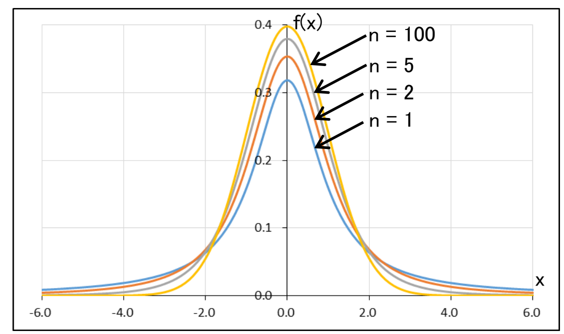


確率変数 Y が、自由度 n のカイ二乗分布に従う



ならば、

$X / (Y / n)^{1/2}$ は、自由度 n の t 分布に従う



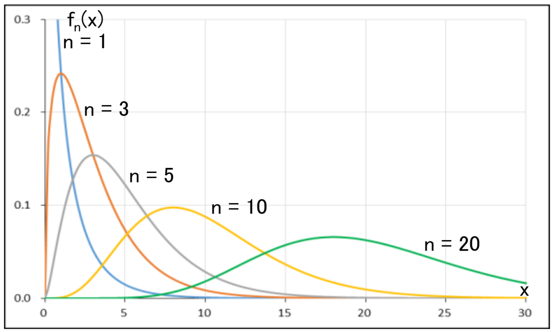
（付図8）t 分布の導出

付録11．F 分布の要約　（別途資料「いろいろな確率分布」参照）

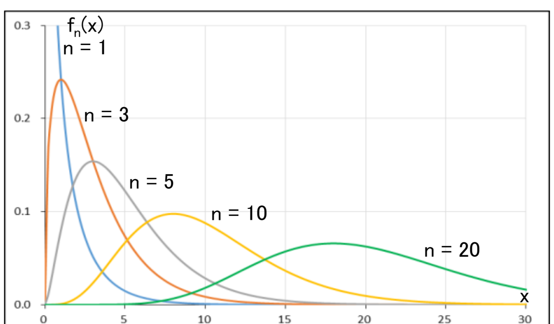
■概要

自由度 m のカイ二乗分布に従う確率変数と自由度 n のカイ二乗分布に従う確率変数が互いに独立であるとき、
自由度を加味した確率変数の比が従う確率分布を、パラメータとして自由度 (m, n) の F 分布という。

確率変数 X が、自由度 m のカイ二乗分布に従う

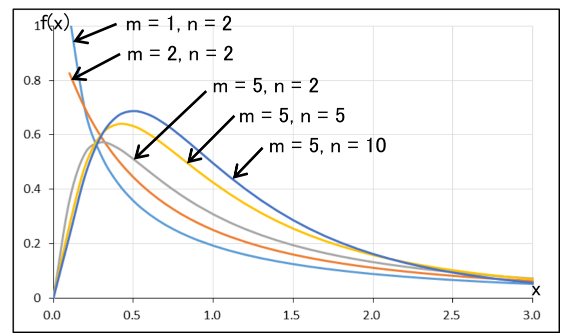


確率変数 Y が、自由度 n のカイ二乗分布に従う



ならば、

(X / m) / (Y / n) は、自由度 (m, n) の F 分布に従う



（付図9）F 分布の導出

付録12. 確率変数 $T = U_X^2 / U_Y^2$ (但し、等分散)は、自由度 (m − 1, n − 1) の F 分布に従う

2つの確率分布の標本平均をそれぞれ、$\overline{X} = (\sum_{i=1}^{m} X_i) / m$ と $\overline{Y} = (\sum_{i=1}^{n} Y_i) / n$ とし、母分散が等しいとする。つまり、$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ であるとする。

また、不偏分散をそれぞれ、$U_X^2 = \{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})\} / (m-1)$ と $U_Y^2 = \{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})\} / (n-1)$ としたとき、

(付式19)の統計量(確率変数) T は、自由度 (m − 1, n − 1) の F 分布に従う。 このことを確認する。

$T = U_X^2 / U_Y^2$ ・・・ (付式19)

(確認)

確率変数 Y, Z が互いに独立で、Y が自由度 m のカイ二乗分布、Z が自由度 n のカイ二乗分布に従うとき、
(付式20)の確率変数 X が従う分布を、自由度 (m, n) の F 分布という。(付式20)が、F 分布の定義式である(付録11)。

$X = (Y / m) / (Z / n)$ ・・・ (付式20)

まず、(付式19) に不偏分散の式を代入する。

$$T = \{ (\sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})) / (m-1) \} / \{ (\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})) / (n-1) \}$$

$$= \{ ((\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})) / \sigma^2) / (m-1) \} / \{ ((\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})) / \sigma^2) / (n-1) \}$$ ・・・ (付式21)

$(\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})) / \sigma^2$ は自由度 m − 1 のカイ二乗分布に従う。同じく、$(\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})) / \sigma^2$ は自由度 n − 1 のカイ二乗分布に従う(別途資料「統計的推定の手順」付録を参照)。

よって、(付式21)を(付録11)の F 分布の定義式に当てはめれば、統計量(確率変数) T は自由度 (m − 1, n − 1) の F 分布に従うことを確認できる。

付録13. 確率変数 X が自由度 n の t 分布に従うとき、X^2 は自由度 (1, n) の F 分布に従う。

確率変数 Z が標準正規分布に従い確率変数 W が自由度 n のカイ二乗分布に従うとき、次式で示す確率変数 X は自由度 n の t 分布に従う(t 分布の定義)。

$X = Z / (W / n)^{1/2}$　　・・・（付式22）

この確率変数を二乗すると、(付式23)が得られる。

$X^2 = Z^2 / (W / n)$　　・・・（付式23）

この式で、Z^2 は標準正規分布の二乗なので、確率変数 Z^2 は自由度 1 のカイ二乗分布に従う。また、確率変数 W は自由度 n のカイ二乗分布に従う。
よって、(付式23)は、次の式に書き換えれば、自由度 (1, n) の F 分布に従うことが分かる(付録11)。

$X^2 = (Z^2 / 1) / (W / n)$

付録14．分散分析の定式化

（付表1）因子の水準ごとの標本データ

因子	水準 1	水準 2		水準 i		水準 m
標本データ	X_{11}	X_{12}	・・・	X_{1i}	・・・	X_{1m}
	X_{21}	X_{22}	・・・	X_{2i}	・・・	X_{2m}
	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・
	$X_{n_1 1}$	$X_{n_2 2}$		$X_{n_i i}$		$X_{n_m m}$
標本サイズ	n_1	n_2	・・・	n_i	・・・	n_m
標本平均	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	・・・	$\bar{X}_i$	・・・	$\bar{X}_m$
母平均	μ_1	μ_2	・・・	μ_{n_i}	・・・	μ_{n_m}

（付表1）は、標本データに影響を及ぼす因子の水準ごとの標本データを示したものである。
水準ごとにまとめた標本データを「群」と呼ぶ。全ての群は、分散 σ^2 の正規分布に従うとする。
なお、総データ数 $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$ ， 全体平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i} X_{ik})/N$, 群平均 $\bar{X}_i = (\sum_{k=1}^{n_i} X_{ik})/n_i$ である。

（1）$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\{(X_{ik}-\bar{X}_i)-(\bar{X}-\bar{X}_i)\}^2$

$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\{(X_{ik}-\bar{X}_i)^2 - 2(X_{ik}-\bar{X}_i)(\bar{X}-\bar{X}_i) + (\bar{X}-\bar{X}_i)^2\}$

ここで、$\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)(\bar{X}-\bar{X}_i) = \sum_{k=1}^{n_i} X_{ik}\bar{X} - \sum_{k=1}^{n_i} X_{ik}\bar{X}_i - \sum_{k=1}^{n_i}\bar{X}_i\bar{X} + \sum_{k=1}^{n_i}\bar{X}_i^2$

$= n_i\bar{X}_i\bar{X} - n_i\bar{X}_i\bar{X}_i - n_i\bar{X}_i\bar{X} + n_i\bar{X}_i^2 = 0$

また、$\sum_{k=1}^{n_i}(\bar{X}-\bar{X}_i)^2 = n_i(\bar{X}-\bar{X}_i)^2$

よって、$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2 + \sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{X}_i-\bar{X})^2$　　・・・（付式24）

① 全平方和 $S_T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X})^2$　② 群内平方和（残差平方和） $S_E = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2$　③ 群間平方和 $S_A = \sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{X}_i-\bar{X})^2$　であるので、

$S_T = S_A + S_E$　　・・・（付式25） と表すことができる。

（2）式 ① の右辺を分散 σ^2 で割った $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X})^2 / \sigma^2$ は、データ数が N であり、自由度 $\phi_T = N-1$のカイ二乗分布に従う（別途資料「統計的推定の手順」付録を参照）。

（3）式 ② の辺を分散 σ^2 で割ると、$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2 / \sigma^2$ となる。

ここで、$\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2 / \sigma^2$ は水準 i においてデータ数が n_i であり、自由度 $n_i - 1$ のカイ二乗分布に従う（「統計的推定の手順」付録を参照）。

従って、$\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2 / \sigma^2$ の m 個の和である $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2 / \sigma^2$ は、カイ二乗分布の再生性（「統計的推定の手順」付録を参照）より、

自由度 $\phi_E = (n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_m-1) = \sum_{i=1}^{m}(n_i-1) = N-m$ のカイ二乗分布に従う。

（4）式 ③ の右辺を分散 σ^2 で割ると、$\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{X}_i-\bar{X})^2 / \sigma^2 = \sum_{i=1}^{m}((\bar{X}_i-\bar{X})/(\sigma / n_i^{-1/2}))^2$ となるが、これは正規分布の二乗和になっているので、自由度 $\phi_A = m-1$ の

カイ二乗分布になっている（付録9）。

（5）帰無仮説を母平均 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m$ であるとし、対立仮説は少なくとも一つの母平均が異なるとする。帰無仮説が成立するときは、$\bar{X}_i = \bar{X}$ となり群間平方和は 0 となる。
一方、群内のばらつき（郡内平方和）より群間のばらつき（群間平方和）が大きいときは、群の母平均に（明らかな）差があると考えることができる。
つまり、S_A / S_E = 群間平方和 / 郡内平方和 という統計量を用意すれば、この値が大きいときには、帰無仮説を棄却するという検定ができる（上側検定になる）。

$S_A / S_E = \sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{X}_i-\bar{X})^2 / \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^{m}((\bar{X}_i-\bar{X})/(\sigma / n_i^{-1/2}))^2 / (\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2/\sigma^2)$

（6）ここで、平方和を自由度で割った不偏分散（分散分析では、平均平方和という）を使用した検定統計量 T を用意する。
この検定統計量 T には、（5）の帰無仮説の棄却の考え方を反映できる。
群間平均平方和 $V_A = S_A / \phi_A$， 群内平均平方和 $V_E = S_E / \phi_E$ として、

$T = V_A / V_E = (S_A / \phi_A) / (S_E / \phi_E)$

$= \{(\sum_{i=1}^{m}((\bar{X}_i-\bar{X})/(\sigma / n_i^{-1/2}))^2) / (m-1)\} / \{(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2/\sigma^2) / (N-m)\}$

・・・（付式26）

この検定統計量 T は、自由度 m − 1 のカイ二乗分布を自由度 N − m のカイ二乗分布で割った統計量であるので、自由度 (m − 1, N − m) の F 分布に従う統計量である（付録11）。

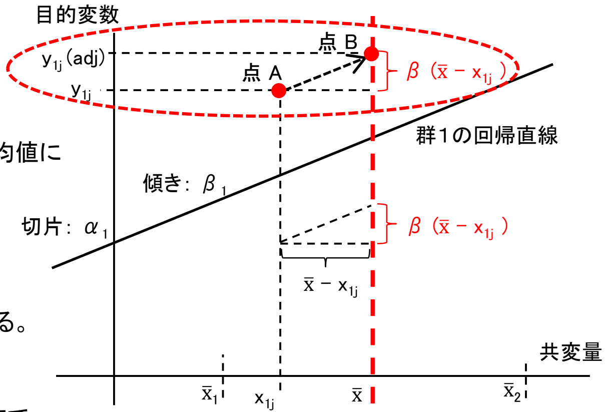
（7）以上をまとめて、分散分析表（付表2）ができる。

（付表2）一元配置の分散分析表

	平方和	自由度	平均平方和	検定統計量
群間	$S_A = \sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{X}_i-\bar{X})^2$	$\phi_A = m-1$	$V_A = S_A / \phi_A$	$T = V_A / V_E$
群内	$S_E = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X}_i)^2$	$\phi_E = N-m$	$V_E = S_E / \phi_E$	
全体	$S_T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}(X_{ik}-\bar{X})^2$	$\phi_T = N-1$		

（注）$S_T = S_A + S_E$， $\phi_T = \phi_A + \phi_B$

付録15. 共分散分析の定式化



(付図10)全体平均に調整する方法

共分散分析のポイントは、回帰直線の情報を使用して共変量(covariate)の影響をなくすことである(付図10)。これは、例えば、群1の共変量の値 x_{1j} に対応する目的変数の値 y_{1j} を2つの群の共変量の平均値 $\bar{x}$ に対応する値である y_{1j} (adj) に変換することで実現できる(付図10で、点 A を点 B へ移す)。つまり、目的変数を共変量の平均値に相当する値に調整することで共演量の影響をなくすという工夫をする。

群1のデータ : $(x_{11}, y_{11}), (x_{12}, y_{12}), \cdots, (x_{1i}, y_{1i}), \cdots, (x_{1m}, y_{1m})$
群2のデータ : $(x_{21}, y_{21}), (y_{22}, y_{22}), \cdots, (y_{2k}, y_{2k}), \cdots, (x_{2n}, y_{2n})$

(1)郡内平方和(S_E)

共変量の平均値に対応した群1の目的変数 y_{1j} (adj) と群2の目的変数 y_{2k} (adj) は以下のように表すことができる。

$y_{1j}(\mathrm{adj}) = y_{1j} + \beta_1 (\bar{x}_1 - x_{1j})$　　β_1 は群1の回帰直線の傾き、β_2 は群2の回帰直線の傾き
$y_{2k}(\mathrm{adj}) = y_{2k} + \beta_2 (\bar{x}_2 - x_{2k})$　　$\beta_1 = \beta_2$ であるとする(2つの回帰直線の傾きは等しいとする)

また、共変量を $\bar{x}$ に調整したときの目的変数の平均を求めておく。y_{1j}(adj) は回帰直線と平行に共変量の平均までシフトしたものであり、y_{1j}(adj) の平均はy_{1i} の平均に等しいことが分かる。

$$\bar{y}_1(\mathrm{adj}) = \bar{y}_{1j} + \bar{\beta}_1 (\bar{x}_1 - \bar{x}_{1j}) = \bar{y}_1 + \beta_1 (\bar{x}_1 - \bar{x}_1) = \bar{y}_1$$

よって、

$$\sum_{j=1}^{m}(y_{1j}(\mathrm{adj}) - \bar{y}_1(\mathrm{adj}))^2 = \sum_{j=1}^{m}(y_{1j}(\mathrm{adj}) - \bar{y}_1)^2 = \sum_{j=1}^{m}(y_{1j} + \beta_1 (\bar{x}_1 - x_{1j}) - \bar{y}_1)^2 = \sum_{j=1}^{m}(y_{1j} - \bar{y}_1)^2 - 2\sum_{j=1}^{m}(y_{1j} - \bar{y}_1)\ \beta_1 (\bar{x}_1 - x_{1j}) + \beta_1^2 \sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_1 - x_{1j})^2 = S_{1yy} - 2\ \beta_1 S_{1xy} + \beta_1^2 S_{1xx} \quad \cdots \text{(付式27)}$$

ここで、S_{1xx} は共変量 x の群1の値 x_{1j} の分散、S_{1yy} は目的変数 y の群1の値 y_{1j} の分散、S_{1xy} は群1の値 x_{1j} と y_{1j} の共分散

群2に関しても同様に、

$$\sum_{j=1}^{m}(y_{2j}(\mathrm{adj}) - \bar{y}_2(\mathrm{adj}))^2 = S_{2yy} - 2\ \beta_2 S_{2xy} + \beta_2^2 S_{2xx} \quad \cdots \text{(付式28)}$$

ここで、S_{2xx} は共変量 x の群2の値 x_{2j} の分散、S_{2yy} は目的変数 y の群2の値 y_{2j} の分散、S_{2xy} は群2の値 x_{2j} と y_{2j} の共分散

ところで、群1の回帰係数(傾き) β_1 と群2の回帰係数 β_2 が等しい場合を考えているので、$\beta = \beta 1 = \beta 2$ である。 また、(付録8)より、$\beta = (S_{1xy} + S_{2xy}) / (S_{1xx} + S_{2xx})$

群内平方和 S_E は、(付式27)と(付式28)の和になるが、この β 代入して、

$$\begin{aligned}
S_E &= (S_{1yy} - 2\ \beta_1 S_{1xy} + \beta_1^2 S_{1xx}) + (S_{2yy} - 2\ \beta_2 S_{2xy} + \beta_2^2 S_{2xx}) = (S_{1yy} - 2\ \beta\ S_{1xy} + \beta^2 S_{1xx}) + (S_{2yy} - 2\ \beta\ S_{2xy} + \beta^2 S_{2xx}) \\
&= (S_{1yy} + S_{2yy}) - 2\ \beta (S_{1xy} + S_{2xy}) + \beta^2 (S_{1xx} + S_{2xx}) \\
&= (S_{1yy} + S_{2yy}) - 2\ ((S_{1xy} + S_{2xy}) / (S_{1xx} + S_{2xx}))\ (S_{1xy} + S_{2xy}) + ((S_{1xy} + S_{2xy}) / (S_{1xx} + S_{2xx}))^2 (S_{1xx} + S_{2xx}) \\
&= (S_{1yy} + S_{2yy}) - 2\ (S_{1xy} + S_{2xy})^2 / (S_{1xx} + S_{2xx}) + (S_{1xy} + S_{2xy})^2 / (S_{1xx} + S_{2xx}) = (S_{1yy} + S_{2yy}) - (S_{1xy} + S_{2xy})^2 / (S_{1xx} + S_{2xx}) \quad \cdots \text{(付式29)}
\end{aligned}$$

(2)全体平方和(S_T)

$S_T = S_{yy}$　　・・・ (付式30)

(3)群間平方和(S_A)

$S_A = S_T - S_E$　　・・・ (付式31)

(4)自由度

全体平方和の自由度 $\phi_T = N - 1$ (全体平均1個使用)
群内平方和の自由度 $\phi_E = N - 3$ (全体平均1個＋群平均2個使用)
群間平方和の自由度 $\phi_A = \phi_T - \phi_E = 2$ となる。

(5)以上をまとめて、(付表3)の共分散分析表を得る。
(付表3)に示す通り、共分散分析の検定統計量 T は、
自由度 (3, N − 3) の F 分布に従う(付録11)。

(付表3)共分散分析表

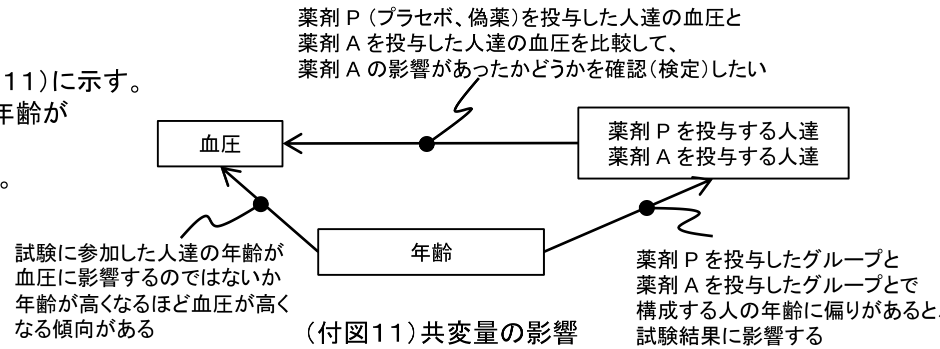
	平方和	自由度	平均平方和	検定統計量
群間	$S_A = S_T - S_E$	$\phi_A = 3$	$V_A = S_A / \phi_A$	$T = V_A / V_E$
群内	$S_E = (S_{1yy} + S_{2yy}) - (S_{1xy} + S_{2xy})^2 / (S_{1xx} + S_{2xx})$	$\phi_E = N - 3$	$V_E = S_E / \phi_E$	
全体	$S_T = S_{yy}$	$\phi_T = N - 1$		

(注) $S_T = S_A + S_E$, $\phi_T = \phi_A + \phi_B$

付録16. 共分散分析(12. の例)の補足

(1)共変量

本文(12. 共分散分析)で取り上げた例での、共変量の位置づけを(付図11)に示す。
この例では、グループ分けした群の年齢構成に差があり(図30)、また、年齢が血圧に影響を与えている(図31)ことが分かる。年齢が共変量になる。
(図31)からも分かるように、年齢が高くなると血圧が高くなる傾向がある。
であるにもかかわらず、血圧を年齢調整せずに分析すると、年齢の影響を取り除かないままでの分析になり問題を生じる。
そこで、血圧を年齢(共変量)調整する共分散分析が必要になる。



(付図11)共変量の影響

(2)群 P(プラセボ、偽薬の投与群) と群 A(試験薬の投与群) の年齢平均の差の検定

ウェルチの t 検定(9－4. を参照)を行う。

不偏分散 $U_P^2 = S_{Pxx} / (10 - 1) = \{(39.0 - 43.9)^2 + (41.0 - 43.9)^2 + \cdots (49.0 - 43.9)^2\} / 9 = 8.77$

不偏分散 $U_A^2 = S_{Axx} / (10 - 1) = \{(36.0 - 40.3)^2 + (37.0 - 40.3)^2 + \cdots (47.0 - 40.3)^2\} / 9 = 11.12$

よって、検定統計量 $T = (43.9 - 40.3) / (8.77^2 / 10 + 11.12^2 / 10)^{1/2} = 2.55$

また、自由度は、$(8.77/ 10 + 11.12 / 10)^2 / ((8.77 / 10)^2 / (10 - 1) + (11.12 / 10)^2 / (10 - 1)) = 17.75$ に近い整数である 18 である。

Excel 関数を使用して、検定統計量 T = 2.55 の p 値 = T.DIST(2.55, 18, 2) = 0.020 < 0.025 (片側有意水準 2.5 %)

従って、群 P と群 A の平均は等しい、という帰無仮説は棄却される。等しくない(差がある)という対立仮説が採択される。

(3)回帰係数

・群 P の回帰直線の回帰係数(直線の傾き) (注、・ は積を表す)

$S_{Pxy} = (39.0 - 43.9)\cdot(95.0 - 108.3) + (41.0 - 43.9)\cdot(99.0 - 108.3) + \cdots + (49.0 - 43.9)\cdot(119.0 - 108.3) = 140.3$

$S_{Pxx} = (39.0 - 43.9)^2 + (41.0 - 43.9)^2 + \cdots (49.0 - 43.9)^2 = 78.9$

群 P の回帰係数は、$S_{Pxy} / S_{Pxx} = 140.3 / 78.9 = 1.78$

・群 A の回帰直線の回帰係数(直線の傾き)

$S_{Axy} = (36.0 - 40.3)\cdot(88.0 - 97.2) + (37.0 - 40.3)\cdot(94.0 - 97.2) + \cdots + (47.0 - 40.3)\cdot(105.0 - 97.2) = 164.4$

$S_{Axx} = (36.0 - 40.3)^2 + (37.0 - 40.3)^2 + \cdots (47.0 - 40.3)^2 = 100.1$

群 P の回帰係数は、$S_{Axy} / S_{Axx} = 164.4 / 100.1 = 1.64$

・群 P と群 A の回帰直線の回帰係数の平均

(付式18)を使用して、$\beta = (S_{Pxy} + S_{Axy}) / (S_{Pxx} + S_{Axx}) = (140.3 + 164.4) / (78.9 + 100.1) = 1.70$

なお、回帰係数の計算は Excel に用意されている(Excel で、「データ」－「データ分析」 －「回帰分析」)。

(4)群内平方和 S_E は、以下の通り、(付録15)の(付式29)を使って求めることもできる。

$S_{Pxx} = (39.0 - 43.9)^2 + (41.0 - 43.9)^2 + \cdots + (49.0 - 43.9)^2 = 78.9$

$S_{Pyy} = (95.0 - 108.3)^2 + (99.0 - 108.3)^2 + \cdots + (119.0 - 108.3)^2 = 642.1$

$S_{Pxy} = (39.0 - 43.9)*(95.0 - 108.3) + (41.0 - 43.9)*(99.0 - 108.3) + \cdots + (49.0 - 43.9)*(119.0 - 108.3) = 78.9 = 140.3$

$S_{Axx} = (36.0 - 40.3)^2 + (37.0 - 40.3)^2 + \cdots + (47.0 - 40.3)^2 = 100.1$

$S_{Ayy} = (88.0 - 97.2)^2 + (94.0 - 97.2)^2 + \cdots + (105.0 - 97.2)^2 = 449.6$

$S_{Axy} = (36.0 - 40.3)*(88.0 - 97.2) + (37.0 - 40.3)*(94.0 - 97.2) + \cdots + (47.0 - 40.3)*(105.0 - 97.2) = 164.4$

以上から、$S_E = (S_{Pyy} + S_{Ayy}) - (S_{Pxy} + S_{Axy})^2 / (S_{Pxx} + S_{Axx}) = (642.1 + 449.6) - (140.4 + 164.4)^2 / (78.9 + 100.1) = 573.0$

付録17. 統計量 $T = \{\Sigma\ (X_i - N p_i)^2\ \}/(N p_i)$ は、自由度 $n - 1$ のカイ二乗分布に従う(1/2)

母集団 E が n 個のグループ(カテゴリー) $E_1, E_2, \cdots, E_n$ から成っており、E からランダムに 1 つ個体を選んだときそれが E_i に属する確率を p_i とする。E から N 個の個体をランダムに抽出して、そのうち E_i に属するものの個数を x_i とする。 このとき、$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は多項分布に従う(別途資料「いろいろな確率分布」付録の多項式定理を参照)。

$p\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \{ N\,! \,/\, (x_1\,!\ x_2\,! \cdots x_n\,!) \}\ p_1^{x_1}\ p_2^{x_2} \cdots p_n^{x_n} = (N\,! \,/ \prod_{i=1}^{n} x_i) \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i}$ ・・・ (付式32)

なお、$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = N$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

(1) 多項分布の式の階乗項を指数関数近似する(別途資料「いろいろな確率分布」付録のスターリングの公式を参照)。

(付32)に近似式 $N\,! = (2\pi)^{1/2}\ N^{N+1/2} \,/\, \exp\,(N)$, $x_i\,! = (2\pi)^{1/2}\ x_i^{x_i+1/2} \,/\, \exp\,(x_i)$ を代入する。また、$\prod_{i=1}^{n} \exp\,(x_i) = \exp\,(\sum_{i=1}^{n} x_i\,) = \exp\,(N)$, $N^{N+n/2} = N^{\Sigma(x_i + 1/2)} = \prod_{i=1}^{n} N^{x_i+1/2}$ である。

$p\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \{ (2\pi)^{1/2}\ N^{N+1/2} \,/\, \exp\,(N) \} \,/\, \{ \prod_{i=1}^{n} ((2\ \pi)^{1/2}\ x_i^{x_i+1/2} \,/\, \exp\,(x_i)) \} \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i} = \{ (2\pi)^{1/2}\ N^{N+1/2} \,/\, \exp\,(N) \} \,/\, \{ (2\ \pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i+1/2} \,/ \prod_{i=1}^{n} \exp\,(x_i)\ \} \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i}$

$= \{ (2\pi)^{1/2}\ N^{N+1/2} \,/\, \exp\,(N) \} \,/\, \{ (2\ \pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i+1/2} \,/\, \exp\,(N)\ \} \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i} = \{ (2\pi)^{1/2}\ N^{N+1/2} \} \,/\, \{ (2\ \pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i+1/2} \} \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i}$

$= \{ (2\pi)^{-(n-1)/2}\ N^{-(n-1)/2}\ N^{N+n/2} \} \,/\, \{ (\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i+1/2} \} \prod_{i=1}^{n} (p_i^{x_i+1/2} p_i^{-1/2}) = \{ N^{-(n-1)/2} \,/\, ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}) \} \{ N^{N+n/2} \prod_{i=1}^{n} (p_i^{x_i+1/2}) \,/ \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i+1/2} \}$

$= \{ N^{-(n-1)/2} \,/\, ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}) \} \{ \prod_{i=1}^{n} N^{x_i+1/2}\ \prod\ (p_i^{x_i+1/2}) \,/ \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i+1/2} \} = \{ N^{-(n-1)/2} \,/\, ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}) \} \prod_{i=1}^{n} (N\ p_i \,/\, x_i)^{x_i+1/2}$ ・・・ (付式33)

(2) 適合度検定に使用する検定統計量の構成要素として t_i^2 を想定し、新しい確率変数 t_i を導入して、t_i の確率分布を求める。

$t_i = (x_i - N\ p_i) \,/\, N^{1/2}$ ・・・ (付式34) とおく。

(付式34)より、$x_i = N\ p_i + N^{1/2}\ t_i$ ・・・ (付式35) この両辺を $N\ p_i$ で割ると、$x_i \,/\, (N\ p_i) = 1 + N^{1/2}\ t_i \,/\, (N\ p_i)$

(付式33)の $\prod_{i=1}^{n} (N\ p_i \,/\, x_i)^{x_i+1/2}$ の近似式を求める。そのため対数をとって t_i を代入する。積の対数は対数の和で表されることを利用する(一般に、$\log\,(A\ B) = \log A + \log B$)。

$-\log \prod_{i=1}^{n} (N\ p_i \,/\, x_i)^{x_i+1/2} = \log \prod_{i=1}^{n} (x_i \,/\, (N\ p_i))^{x_i+1/2} = \sum_{i=1}^{n} \log\,(x_i \,/\, (N\ p_i))^{x_i+1/2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i + 1/2) \log\,(x_i \,/\, (N\ p_i)) = \sum_{i=1}^{n} (N\ p_i + N^{1/2}\ t_i + 1/2) \log\,(1 + N^{1/2}\ t_i \,/\, (N\ p_i))$

$= \sum_{i=1}^{n} (N\ p_i + N^{1/2}\ t_i + 1/2) \log\,(1 + t_i \,/\, (N^{1/2}\ p_i))$ ・・・ (付式36)

$\log\,(1 + t_i \,/\, (N^{1/2}\ p_i))$ をマクローリン展開して(別途資料「いろいろな確率分布」付録を参照)近似する。下式の $O(N^{-3/2})$ は、N の次数が −3/2 次以下の項からなることを示す。

$\log\,(1 + t_i \,/\, (N^{1/2}\ p_i)) = t_i \,/\, (N^{1/2}\ p_i) - (1/2)\,(t_i \,/\, (N^{1/2}\ p_i))^2 + (1/3)\,(t_i \,/\, (N^{1/2}\ p_i))^3 - \cdots = t_i \,/\, (N^{1/2}\ p_i) - (1/2)\,(t_i^2 \,/\, (N\ p_i^2)) + O(N^{-3/2})$

よって、$-\log \prod_{i=1}^{n} (N\ p_i \,/\, x_i)^{x_i+1/2} = \sum_{i=1}^{n} (N\ p_i + N^{1/2}\ t_i + 1/2)\,(t_i \,/\, (N^{1/2}\ p_i) - (1/2)\,(t_i^2 \,/\, (N\ p_i^2)) + O(N^{-3/2}))$

$= \sum_{i=1}^{n} (N^{1/2}\ t_i - t_i^2 \,/\, (2\ p_i) + t_i^2 \,/\, p_i - t_i^3 \,/\, (2\ N^{1/2}\ p_i^2) + t_i \,/\, (2\ N^{1/2}\ p_i) - t_i^2 \,/\, (4\ N\ p_i^2) + O(N^{-1/2})) = \sum_{i=1}^{n} (N^{1/2}\ t_i - t_i^2 \,/\, (2\ p_i) + t_i^2 \,/\, p_i + O(N^{-1/2}))$

$= \sum_{i=1}^{n} (N^{1/2}\ t_i + t_i^2 \,/\, (2\ p_i) + O(N^{-1/2}))$ → ここで、N を大きくすると、$O(N^{-1/2}) = 0$ となるので、 $-\log \prod_{i=1}^{n} (N\ p_i \,/\, x_i)^{x_i+1/2} = \sum_{i=1}^{n} (N^{1/2}\ t_i + t_i^2 \,/\, (2\ p_i))$

$\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - N\ p_i) \,/\, N^{1/2} = (\sum_{i=1}^{n} x_i - N \sum_{i=1}^{n} p_i) \,/\, N^{1/2} = (N - N \cdot 1) \,/\, N^{1/2} = 0$ ・・・ (付式37) であるので、

$-\log \prod_{i=1}^{n} (N\ p_i \,/\, x_i)^{x_i+1/2} = \sum_{i=1}^{n} ((N^{1/2}\ t_i + t_i^2 \,/\, (2\ p_i)) = N^{1/2} \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \,/\, (2\ p_i) = 0 + \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \,/\, (2\ p_i) = (1/2) \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \,/\, p_i$

従って、$\prod_{i=1}^{n} (N\ p_i \,/\, x_i)^{x_i+1/2} = \exp\,(-(1/2) \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \,/\, p_i)$ ・・・ (付式38)

ここで、確率変数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の確率分布を $g(t_i)$ としたとき、t_n は $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ によって決まり、

合わせて、確率変数 x_i から新しい確率変数 t_i への確率変数変換の前後で確率は変わらないので(別途資料「いろいろな確率分布」付録を参照)、次式が成り立つ。

$g(t_1, t_2, \cdots, t_n)\ dt_1\ dt_2 \cdots dt_{n-1} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ dx_1\ dx_2 \cdots dx_{n-1}$

また、(付式35)より、$dx_i = N^{1/2}\ dt_i$ であるので、$dx_1\ dx_2 \cdots dx_{n-1} = (N^{1/2}\ dt_1)\,(N^{1/2}\ dt_2) \cdots (N^{1/2}\ dt_{n-1}) = N^{(n-1)/2}\ dt_1\ dt_2 \cdots dt_{n-1}$

まとめると、$g(t_1, t_2, \cdots, t_n)\ dt_1\ dt_2 \cdots dt_{n-1} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ N^{(n-1)/2}\ dt_1\ dt_2 \cdots dt_{n-1}$

ここで、$f\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) = p\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ であるので、

(付式33)を代入し、(付式38)を使って、$g(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ N^{(n-1)/2} = \{ N^{-(n-1)/2} \,/\, ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}) \} \exp\,(-(1/2) \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \,/ p_i)\ N^{(n-1)/2}$

$= \{ 1 \,/\, ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}) \} \exp\,(-(1/2)\,(\sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 \,/ p_i + t_n^2 / p_n))$

さらに、(付式37)より、$t_n = \sum_{i=1}^{n-1} t_i$ であるので、$g(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) = \{ 1 \,/\, ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}) \} \exp\,(-(1\,/2)\,(\sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 \,/ p_i + (\sum_{i=1}^{n-1} t_i)^2 \,/ p_n)$ ・・・ (付式39)

付録17. 統計量 $T = \{\Sigma\ (X_i - N\ p_i)^2\ \}/(N\ p_i)$ は、自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う(2/2)

(3)(付式39)の指数部分に注目し、2次形式の標準形に書き直す。

この式は固有値 λ_i を持つ対称行列 $A = (a_{ij})$ を使って、(付式40)のような2次形式の標準形に書き直すことができる(付録2)。

$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 / p_i = \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 / p_i + (\sum_{i=1}^{n-1} t_i)^2 / p_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}\ t_i\ t_j$ (2次形式)とおくと、行列 A の固有値 λ_i を使って、$\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}\ t_i\ t_j = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\ s_i^2$ (2次形式の標準形) ・・・ (付式40) で表せる。

$$A = \begin{bmatrix} 1/p_1+1/p_n & 1/p_n & \cdot & 1/p_n \\ 1/p_n & 1/p_2+1/p_n & \cdot & 1/p_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/p_n & 1/p_n & \cdot & 1/p_{n-1}+1/p_n \end{bmatrix}$$

なお、(付式40) ≧ 0 である(0 になるのは、全ての $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ のときに限る)。

よって、行列 A は正定であり、行列 A の固有値 λ_i は全て正の実数の値を取ることが分かる(付録2)。

(4)適合度検定に使用する統計量の構成要素として u_i^2 を想定して新しい確率変数 u_i を導入し、u_i の確率分布を求める。

行列 A の固有値 λ_i は全て正の実数の値を取ることが分かったので、新しい統計量(付式41)が定義できる。

$u_i = \lambda_i^{1/2}\ s_i$ ・・・ (付式41)

確率変数ベクトル (t_i) を変数変換したのが確率変数ベクトル (s_i) であり、さらにそれを(付式41)を使用して変数変換した確率変数ベクトルが(u_i) である($i = 1, 2, \cdots, n-1$)。

この関係を、変換行列 L と D を使用して表す。

$(t_i) = L\ (s_i) = L\ D\ (u_i)$ ・・・ (付式42) また、(付式41)より、$s_i = u_i\ / \lambda^{1/2}$ であるので、行列 $D = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2^{1/2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1/\lambda_{n-1}^{1/2} \end{bmatrix}$

変換行列 L は2次形式への変換であるので(付録2と付録3)、変換倍率を表すヤコビアン(行列式)は、$|L| = 1$ である(別途資料「いろいろな確率分布」付録を参照)。

一方、もう1つの変換行列 D は上記の通りであり、また一般に、行列式 $|A|$ の値は行列 A の固有値の積に等しい、つまり、$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ であるので、

このヤコビアンは、$|D| = (1/\lambda_1^{1/2})\ (1/\lambda_2^{1/2}) \cdots (1/\lambda_{n-1}^{1/2}) = 1 / \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{1/2} = |A|^{-1/2}$ である。

よって、行列式に関して一般に、$|Q\ R| = |Q|\ |R|$ が成り立つので、確率変数ベクトル (t_i) を確率変数ベクトル (u_i) へ変換する際のヤコビアンは、(付式42)より、

$J\ (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) = |\ \partial (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) / \partial (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})\ | = |L\ D| = |L|\ |D| = |A|^{-1/2}$ ・・・ (付式43)

従って、(付式42)の確率変数 t_i の確率分布 $g(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$ から確率変数 u_i の確率分布 $h(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ への変換は、(付式43)のヤコビアンを使用して、

$h(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) = g(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})\ J\ (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) = \{\ 1\ /\ ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2})\ \}\ \exp\ (-\ (1/2)\ (\sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 / p_i + (\sum_{i=1}^{n-1} t_i)^2 / p_n)\ |A|^{-1/2}$

$= \{\ 1\ /\ ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}\ |A|^{1/2})\ \}\ \exp\ \{-\ (1/2) \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i\ s_i^2)\ \} = \{\ 1\ /\ ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}\ |A|^{1/2})\ \}\ \exp\ \{-\ (1/2) \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2\ \}$ ・・・ (付式44)

(付式44)を使用して、確率分布 $h(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ の全積分を求める。全積分の値は 1 になる。なお、式変形では、多変数のガウス積分(付録4)を使用する。

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})\ du_1\ du_2, \cdots du_{n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \{\ 1\ /\ ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}\ |A|^{1/2})\ \}\ \exp\ \{-\ (1/2) \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2\ \}\ du_1\ du_2, \cdots du_{n-1}$

$= \{\ 1\ /\ ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}\ |A|^{1/2})\ \} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\ \{-\ (1/2) \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2\ \}\ du_1\ du_2, \cdots du_{n-1} = \{\ 1\ /\ ((2\pi)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}\ |A|^{1/2})\ \}\ (2\ \pi)^{(n-1)/2} = 1\ /\ (\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}\ |A|^{1/2}) = 1$

よって、 $\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/2}\ |A|^{1/2} = 1$ ・・・ (付式45)

従って、(付式44)に(付式45)を代入して、

$h(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) = \{\ 1\ /\ ((2\pi)^{(n-1)/2})\ \}\ \exp\ \{-\ (1/2) \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2\ \} = \{\ 1\ /\ ((2\pi)^{(n-1)/2})\ \} \prod_{i=1}^{n-1} \exp\ (\ u_i^2 / 2\ ) = \prod_{i=1}^{n-1} (1\ /\ (2\ \pi)^{1/2}\ )\ \exp\ (\ u_i^2 / 2\ )$ ・・・ (付式46)

(付式46)から個々の確率変数 u_i は標準正規分布に従うことが分かる。(付式46)は多変量正規分布の式である(別途資料「いろいろな確率分布」を参照)。

(5)適合度の検定に使用する検定統計量が、自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従うことを確認する。

(付式40)と(付式41)より、検定統計量 $T = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 / p_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\ s_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2$ は標準正規分布に従う確率変数 u_i の二乗和であるから、自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従うことが分かる(付録9)。つまり、n が十分に大きいとき、$T = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 / p_i$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従うことが分かる。

ここで、(付式34)で t_i を x_i に戻せば、$T = \sum_{i=1}^{n} (x_i - N\ p_i)^2 / (N\ p_i)$ が自由度 $n-1$ のカイ二乗分布従うことが確認できる。

付録18. ウィルコクソンの符号順位検定に使う統計量

ウィルコクソンの符号順位検定は、対応のある2標本のデータが同じ確率分布に従うか否かを検定する方法であり、サンプリングサイズが異なる場合に使用できない（異なる場合には、対応のない検定であるウィルコクソンの順位和検定を使用する）。

確率密度関数 $f(x)$ の母集団と確率密度関数 $g(y)$ の母集団から対応した標本データ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ （標本 X）と標本データ $y_1, y_2, \cdots, y_n$ （標本 Y）をそれぞれ抽出する。ここで、対応する2つの標本のデータの差 $z_i = x_i - y_i$ に注目し、絶対値 $|z_i|$ の小さい順に並び替えて、順位 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ （確率変数 R_i）を割り付ける。ここで、順位の合計を表す新しい確率変数として W を（付式47）で定義する。順位の合計は標本平均の場合と同じくサンプルサイズが大きいときは正規分布に従うと考えられる（別途資料「いろいろな確率分布」中心極限定理を参照）。

$$W = \sum_{i=1\,(z_i \geqq 0)}^{n} R_i \quad \cdots （付式47）$$

ここで、（付式48）で表される統計量 T を定義する。（付式48）は標準化の処理（別途資料「いろいろな確率分布」付録を参照）であり、この変換により確率変数 T は標準正規分布に従うことになる。（付式48）の確率変数 W の期待値 E [W] と分散 V [W] を求める。

$$T = (W - E[W]) / (V[W])^{1/2} \quad \cdots （付式48）$$

ところで、帰無仮説は2つ母集団の差は中央値 $\theta = 0$ を中心とした分布である、という仮説であるので、この帰無仮説のもとでは（付式49）が成り立つ。

$$P(Z_i \leqq 0) = P(Z_i > 0) = 1/2 \quad \cdots （付式49）$$

なお、$P(Z_i > 0)$ は、確率変数 Z_i が正の値になる確率（P： Probability）を表す。

一方、順位を表す R_i に関して、正の値のデータの順位と負の値のデータの順位という視点で、そして負のデータの順位を 0 とすれば帰無仮説のもとでは（付式50）が成り立つ。

$$P(R_i = 0) = P(R_i = i) = 1/2 \quad \cdots （付式50）$$

（1）期待値 E [W]

離散系の期待値の定義に従うと、順位 R_i の期待値は順位とその順位の確率の積和（付式51）になる。なお、式変形では自然数の和の公式（本頁下に記載）を用いている。

$$E[W] = E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[R_i] = \sum_{i=1}^{n} \{0 \cdot P(R_i = 0) + i \cdot P(R_i = i)\} = \sum_{i=1}^{n} i \cdot P(R_i = i) = \sum_{i=1}^{n} i / 2 = 1/2 \sum_{i=1}^{n} i = (1/2)\, n(n+1)/2 = n(n+1)/4 \quad \cdots （付式51）$$

（2）分散 V [W]

一般に、$V[W] = E[W^2] - (E[W])^2$ である（別途資料「いろいろな確率分布」付録を参照）。E [W] は既に（付式51）で求まっているので、$E[W^2]$ を計算する。

$$W^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right)^2 = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)^2 = (R_1^2 + R_2^2 + \cdots + R_n^2) + \{(R_1R_2 + R_1R_3 + \cdots + R_1R_n) + (R_2R_1 + R_2R_3 + \cdots + R_2R_n) + \cdots + (R_nR_1 + R_nR_2 + \cdots + R_nR_{n-1})\} \quad \cdots （付式52）$$

$$E[W^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i^2\right] + E\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} R_i R_j\right] \quad \cdots （付式53）$$

① $E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i^2\right]$ を計算する（自然数の和の公式を利用する）。

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n} E[R_i^2] = \sum_{i=1}^{n} i^2 P(R_i = i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 (1/2) = 1/2 \sum_{i=1}^{n} i^2 = (1/2)\, n(n+1)(2n+1)/6 = n(n+1)(2n+1)/12 \quad \cdots （付式54）$$

② $E\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} R_i R_j\right]$ を計算する。

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} R_i R_j\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} E[R_i R_j] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} \{i \cdot j\, P(R_i = i, Rj = j) + 0 \cdot j\, P(R_i = 0, R_j = j) + i \cdot 0\, P(R_i = i, R_j = 0) + 0 \cdot 0\, P(Ri = 0, Rj = 0)\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} i\, j / 4$$

ここで、（付式52）より、$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} i\, j = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2$ が成り立つ（自然数の和の公式を利用する）ので、

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} R_i R_j\right] = (1/4)\{(n(n+1)/2)^2 - n(n+1)(2n+1)/6\} \quad \cdots （付式55）$$

（付式54）と（付式55）を（付式53）に代入すると、

$$E[W^2] = n(n+1)(2n+1)/12 + (1/4)\{(n(n+1)/2)^2 - n(n+1)(2n+1)/6\} = n(n+1)(2n+1)/24 + n^2(n+1)^2/16 \quad \cdots （付式56）$$

従って、（付式51）と（付式56）を使って、

$$V[W] = E[W^2] - (E[W])^2 = n(n+1)(2n+1)/24 + n^2(n+1)^2/16 - \{n(n+1)/4\}^2 = n(n+1)(2n+1)/24 \quad \cdots （付式57）$$

（3）以上まとめると、ウィルコクソンの符号順位検定で、確率変数 $W = \sum_{i=1}^{n} R_i$ を使用した確率分布は、以下の通りである。

標準正規分布 $T = (W - E[W]) / (V[W])^{1/2}$ ・・・ （付式48）

期待値 $E[W] = n(n+1)/4$ ・・・ （付式51）

分散 $V[W] = n(n+1)(2n+1)/24$ ・・・ （付式57）

（参考）自然数の和の公式 （$n = 1, 2, \cdots$ とする）

・$\sum_{i=1}^{n} k = n(n+1)/2$　・$\sum_{i=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

付録19. ウィルコクソンの符号順位検定の例

（付表4）に示す標本 X と Y の確率分布の平均が等しいか否かを検定する。
標本 X と Y のデータの分布を並べてプロットしたのが（付図12）である。この図から、標本 X と Y の確率分布の平均の位置は近い（ほぼ同じ分布である）ことが予見される。

差が 0 のものは順位付けから除外する。また、差の絶対値を小さい順にならべ直したとき、同順位のものが発生した場合、例えば、4 つが同順位、例えば 3 位になった場合、4 つの順位は同順位で (3 + 4 + 5 + 6) / 4 = 4.5 であるとする（補正順位）。
差がプラスの順位の和は標準正規分布（付式48）に従う（付録18）。補正順位がある場合の平均は（付式58）で、分散は（付式59）で表される（最終頁の資料を参照）。

検定統計量　$T = (W - E[W]) / (V[W])^{1/2}$　・・・（付式48）
期待値　$E[W] = n'(n' + 1) / 4$　・・・（付式58）
分散　$V[W] = n'(n' + 1)(2n' + 1) / 24 - \sum_{i=1}^{s} d_i (d_i^2 - 1) / 48$　・・・（付式59）
d_0：差のない対の個数，d_i：同順位となる組 i に対するサンプル対の数，$n' = n - d_0$，s：同順位となる組数

（付表4）標本データと差の順位

	X	Y	Z	|Z|	順位	補正順位
1	52	60	−8	8	12	12
2	66	61	5	5	7	8
3	41	52	−11	11	13	13.5
4	52	63	−11	11	13	13.5
5	65	66	−1	1	1	1.5
6	70	68	2	2	3	4.5
7	72	70	2	2	3	4.5
8	54	60	−6	6	10	10
9	78	80	−2	2	3	4.5
10	43	50	−7	7	11	11
11	60	55	5	5	7	8
12	80	75	5	5	7	8
13	74	74	0	0		
14	61	60	1	1	1	1.5
15	53	55	−2	2	3	4.5

	Z	補正順位
1	1	① 1.5
2	−1	1.5
3	2	② 4.5
4	2	4.5
5	−2	4.5
6	−2	4.5
7	5	③ 8
8	5	8
9	5	8
10	−6	10
11	−7	11
12	−8	12
13	−11	④ 13.5
14	−11	13.5

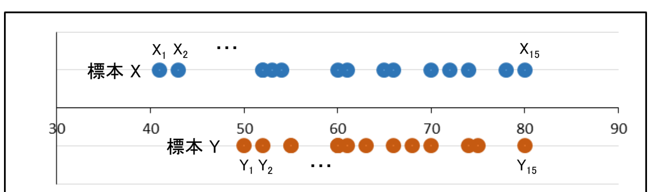
1）表より、差がプラスの補正順位の総和を求める。
$W = 1.5 + 4.5 + 4.5 + 8 + 8 + 8 = 34.5$

2）順位和 W の期待値（平均）と分散を求める。
$n = 15$，$d_0 = 1$　よって、$n' = 15 - 1 = 14$
同順位となる組数は、表より $s = 4$　そして、① $d_1 = 2$，② $d_2 = 4$，③ $d_3 = 3$，④ $d_4 = 2$
従って、
$E[W] = 14 \cdot (14 + 1) / 4 = 52.5$
$V[W] = 14 \cdot (14 + 1) \cdot (2 \cdot 14 + 1) / 24$
$- \{ (2 \cdot (2^2 - 1) + 4 \cdot (4^2 - 1) + 3 \cdot (3^2 - 1) + 2 \cdot (2^2 - 1) \} / 48 = 251.75$

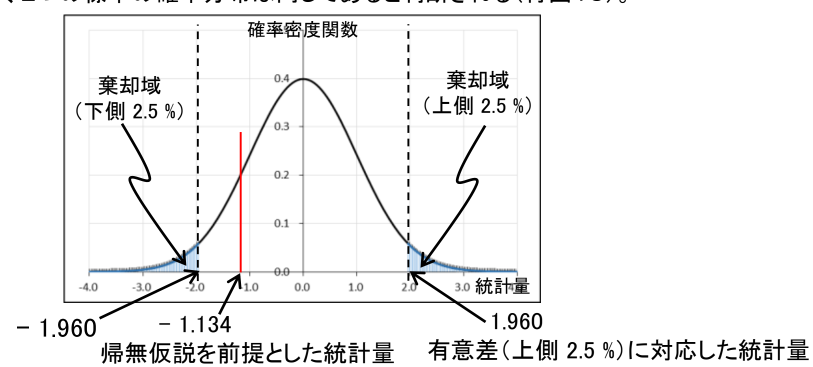
3）（付式48）を使って、検定統計量 T を求める。
$T = (34.5 - 52.5) / 251.75^{1/2} = -1.134$

4）標準正規分布の両側 5 % 有意水準で、
（下側棄却域 2.5 % の統計量 = − 1.960）< −1.134
なお、p 値 = 1 − NORMDIST (−1.134, 0, 1, true) = 0.872 > 0.025（上側 棄却域）

5）帰無仮説を前提とした統計量 T は棄却域に入っていない。
よって、帰無仮説は棄却されず、受容されることになる。
つまり、2つの標本の確率分布は同じであると判断される（付図13）。



（付図12）標本データ（付表1）のプロット



（付図13）標準正規分布の検定

付録20. ウィルコクソンの順位和検定に使う統計量（1/2）

確率密度関数 $f(x)$ の母集団から抽出した標本サイズ m のデータを $x_1, x_2, \cdots, x_m$（標本 X）とする。一方、確率密度関数 $g(y)$ の母集団からは抽出した標本サイズ n のデータを $y_1, y_2, \cdots, y_n$（標本 Y）とする。この2つの標本のデータを一緒にして値の小さい順に並び替え順位を付ける。そこから、標本 X のデータにつけられた順位を取り出し、小さい順に $r_1, r_2, \cdots, r_m$（確率変数 R_i）とする。
ここで、順位を表す確率変数 R_i の和（順位和）を表す新しい確率変数として W を（付式60）で定義する。順位の合計は標本平均の場合と同じく、サンプルサイズが大きいときは正規分布に従うと考えられる（別途資料「いろいろな確率分布」中心極限定理を参照）。なお、標本 Y の順位の合計は標本 X と標本 Y の全体での順位の合計から標本 X の順位の合計を引いたものになる。標本 X の順位の合計が決まれば標本 Y の順位の合計は決まる。よって、標本 Y の順位は見ずに、標本 X の順位だけで考えればいい。

$$W = \sum_{i=1}^{m} R_i \quad \cdots \text{（付式60）}$$

ここで、（付式61）で表される統計量 T を定義する。（付式61）は標準化の処理（別途資料「いろいろな確率分布」付録を参照）であり、この変換により確率変数 T は標準正規分布に従うことになる。（付式61）の確率変数 W の期待値 E [W] と分散 V [W] を求める。

$$T = (W - E[W]) / (V[W])^{1/2} \quad \cdots \text{（付式61）}$$

（1）期待値 E [W]

離散系の期待値の定義に従うと、順位 R_i の期待値は順位 k とその順位の確率 $P(R_i = k)$ の積和（付式62）になる。

$$E[R_i] = \sum_{k=1}^{m+n} k\, P(R_i = k) \quad \cdots \text{（付式62）}$$

なお、$P(R_i = k)$ は、確率変数 R_i が順位 k になる確率(P: Probability)を表す。

よって、$E[W] = E[\sum_{i=1}^{m} R_i] = \sum_{i=1}^{m} E[R_i] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m+n} k\, P(R_i = k) = m \sum_{k=1}^{m+n} k\, P(R_i = k)$

また、R_i が特定の順位 k になる確率は、全ての順位の数は m + n であるので、$P(R_i = k) = 1 / (m + n)$ である。自然数の和の公式（付録18.（参考））を使用して、

$$E[W] = m \sum_{k=1}^{m+n} k / (m + n) = m / (m + n) \sum_{k=1}^{m+n} k = \{ m / (m + n)\} (m + n) (m + n + 1) / 2 = m (m + n + 1) / 2 \quad \cdots \text{（付式63）}$$

（2）分散 V [W]

一般に、$V[W] = E[W^2] - (E[W])^2$ である（別途資料「いろいろな確率分布」付録を参照）。E [W] は既に（付式63）で求まっているので、$E[W^2]$ を計算する。

$$W^2 = (\sum_{i=1}^{m} R_i)^2 = (R_1 + R_2 + \cdots + R_m)^2 = (R_1^2 + R_2^2 + \cdots + R_m^2) + \{(R_1R_2 + R_1R_3 + \cdots + R_1R_m) + (R_2R_1 + R_2R_3 + \cdots + R_2R_m) + \cdots + (R_mR_1 + R_mR_2 + \cdots + R_mR_{m-1})\} \cdots \text{（付式64）}$$

よって、$E[W^2] = E[(\sum_{i=1}^{m} R_i)^2] = E[\sum_{i=1}^{m} R_i^2] + E[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1(j\neq i)}^{m} R_i R_j] \quad \cdots$（付式65）

① $E[\sum_{i=1}^{m} R_i^2]$ を計算する。

全ての順位の数は m + n 通りであるので、R_i が特定の順位 k になる確率は、$P(R_i = k) = 1 / (m + n)$ である。また、R_i の数は、m である。

よって、$E[\sum_{i=1}^{m} R_i^2] = \sum_{i=1}^{m} E[R_i^2] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m+n} k^2 P(R_i = k) = m \sum_{k=1}^{m+n} k^2 P(R_i = k) = m \sum_{k=1}^{m+n} k^2 / (m + n) = m / (m + n) \sum_{k=1}^{m+n} k^2$

$= \{ m / (m + n) \} \{ (m + n) (m + n + 1) (2 (m + n) + 1) / 6 = m (m + n + 1) (2 (m + n) + 1) / 6 \quad \cdots$（付式66）

② $E[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1(j\neq i)}^{m+n} R_i R_j]$ を計算する。

全ての順位の2対の組み合わせの数は $(m + n) (m + n - 1)$ 通りであるので、
R_i が特定の順位 s , R_j が特定の順位 t になる確率は、$P(R_i = s) P(R_j = t) = 1 / \{ (m + n) (m + n - 1) \}$ である。また、$R_i R_j$ の組み合わせの数は、$m (m - 1)$ 通りである。

よって、$E[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1(j\neq i)}^{m} R_i R_j] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1(j\neq i)}^{m} E[R_i R_j] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1(j\neq i)}^{m}\sum_{s=1}^{m+n}\sum_{t=1(s\neq t)}^{m+n} s\, t\, P(R_i = s) P(R_j = t) = m (m - 1) \sum_{s=1}^{m+n}\sum_{t=1(s\neq t)}^{m+n} s\, t\, P(R_i = s) P(R_j = t)$

$= m (m - 1) \sum_{s=1}^{m+n}\sum_{t=1(s\neq t)}^{m+n} s\, t / \{ (m + n) (m + n - 1) \} = m (m - 1) / \{ (m + n) (m + n - 1) \} \sum_{s=1}^{m+n}\sum_{t=1(s\neq t)}^{m+n} st \quad \cdots$（付式67）

（付式64）より、$\sum_{s=1}^{m+n}\sum_{t=1(s\neq t)}^{m+n} st = (\sum_{s=1}^{m+n} s)^2 - \sum_{s=1}^{m+n} s^2$ であるので、これを（付式67）に代入する。式変形には自然数の和の公式（付録18.（参考））を使用する。

$E[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1(j\neq i)}^{m} R_i R_j] = m (m - 1) / \{ (m + n) (m + n - 1) \} \{(\sum_{s=1}^{m+n} s)^2 - \sum_{s=1}^{m+n} s^2 \}$

$= m (m - 1) / \{ (m + n) (m + n - 1) \} \{ ((1/2) (m + n) (m + n + 1))^2 - (1/6) (m + n) (m + n + 1) (2 (m + n) + 1) \}$

$= m (m - 1) (m + n) (m + n + 1)^2 / (4 (m + n - 1)) - m (m - 1) (m + n + 1) (2 (m + n) + 1) / (6 (m + n - 1)) \quad \cdots$（付式68）

付録20. ウィルコクソンの順位和検定に使う統計量(2/2)

（2）分散 V [W] （つづき）

（付式65)に、(付式66)と(付式68)を代入する。

$E[W^2] = m(m+n+1)(2(m+n)+1)/6 + m(m-1)(m+n)(m+n+1)^2/(4(m+n-1)) - m(m-1)(m+n+1)(2(m+n)+1)/(6(m+n-1))$

$= \{1/(6(m+n-1))\}\{m(m+n-1)(m+n+1)(2(m+n)+1) - m(m-1)(m+n+1)(2(m+n)+1)\} + \{m(m-1)(m+n)(m+n+1)^2\}/\{4(m+n-1)\}$

$= \{1/(6(m+n-1))\}\{(m(m+n-1) - m(m-1))(m+n+1)(2(m+n)+1)\} + \{m(m-1)(m+n)(m+n+1)^2\}/\{4(m+n-1)\}$

$= \{1/(6(m+n-1))\}\{m\,n(m+n+1)(2(m+n)+1)\} + \{m(m-1)(m+n)(m+n+1)^2\}/\{4(m+n-1)\}$ ・・・（付式69）

従って、(付式63)と(付式69)を使って、

$V[W] = E[W^2] - (E[W])^2$

$= \{1/(6(m+n-1))\}\{m\,n(m+n+1)(2(m+n)+1)\} + \{m(m-1)(m+n)(m+n+1)^2\}/\{4(m+n-1)\} - \{m(m+n+1)/2\}^2$

$= \{1/(6(m+n-1))\}\{m\,n(m+n+1)(2(m+n)+1)\} + \{m(m-1)(m+n) - m^2(m+n-1)\}(m+n+1)^2/\{4(m+n-1)\}$

$= \{1/(6(m+n-1))\}\{m\,n(m+n+1)(2(m+n)+1)\} + \{m(m^2+m\,n-m-n) - m^3 - m^2 n + m^2\}(m+n+1)^2/\{4(m+n-1)\}$

$= \{1/(6(m+n-1))\}\{m\,n(m+n+1)(2(m+n)+1)\} + \{m^3 + m^2 n - m^2 - m\,n - m^3 - m^2 n + m^2\}(m+n+1)^2/\{4(m+n-1)\}$

$= \{1/(6(m+n-1))\}\{m\,n(m+n+1)(2(m+n)+1)\} - m\,n(m+n+1)^2/\{4(m+n-1)\}$

$= \{1/(12(m+n-1))\}\{2\,m\,n(m+n+1)(2(m+n)+1) - 3\,m\,n(m+n+1)^2\}$

$= \{1/(12(m+n-1))\}\{4(m+n)+2-3(m+n+1)\}\,m\,n(m+n+1)$

$= \{1/(12(m+n-1))\}(m+n-1)\,m\,n(m+n+1)$

$= m\,n(m+n+1)/12$ ・・・（付式70）

（3）以上まとめると、ウィルコクソンの順位和 $W = \sum_{i=1}^{m} R_i$ が従う確率分布は、以下の通りである。

標準正規分布 $T = (W - E[W])/(V[W])^{1/2}$ ・・・（付式61）

期待値 $E[W] = m(m+n+1)/2$ ・・・（付式63）

分散 $V[W] = m\,n(m+n+1)/12$ ・・・（付式70）

付録21．ウィルコクソンの順位和検定の例

（付表5）に示す標本 X と Y の確率分布の平均が等しいか否かを検定する。
標本 X と Y のデータの分布を並べてプロットしたのが（付図14）である。この図から、標本 X と Y の確率分布の平均の位置は近い（ほぼ同じ分布である）ことが予見される。

（付表5）標本データと順序付け（並び替え）

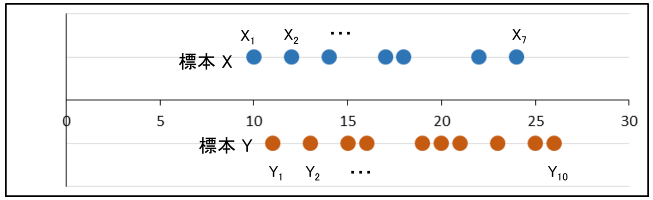
・標本データ

	X	Y
1	12	25
2	17	15
3	24	19
4	10	26
5	22	13
6	14	23
7	18	11
8		20
9		21
10		16

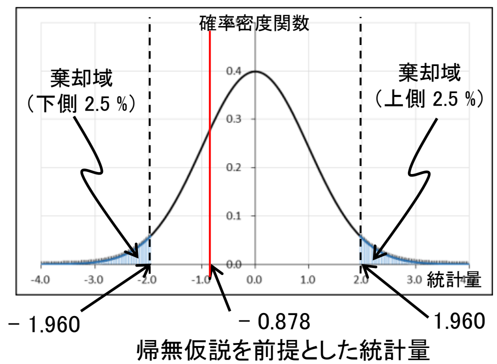
・順序付け

混合	順位
10	1
11	2
12	3
13	4
14	5
15	6
16	7
17	8
18	9
19	10
20	11
21	12
22	13
23	14
24	15
25	16
26	17

（注）
混合は、標本 X と標本 Y のデータを一緒にして小さい順に並び替えたものである。
水色のデータは、標本 X のデータ、オレンジ色のデータは、標本 Y のデータであることを示す。



（付図14）標本データのプロット



（付図15）標準正規分布の検定

1）（付表5）より、標本 X の順位の総和を求める。
　W = 1 + 3＋5＋8 + 9 + 13 + 15 = 54

2）順位和 W の期待値（平均）と分散を求める（m = 7 , n = 10）。
　E [W] = 7 ∗ (7 + 10 + 1) / 2 = 63
　V [W] = 7 ∗ 10 ∗ (7 + 10 + 1) / 12 = 105

3）（付式61）を使って、検定統計量 T を求める。
　T = (54 − 63) / $105^{1/2}$ = − 0.878

4）このときの p 値は、T が標準正規分布に従うので、
　Excel 関数を使って、T < 0 であるので、
　　p 値 = NORMDIST (− 0.878, 0, 1, true)
　　　= 0.190 > 0.025 （下側 2.5 % 有意水準）

5）帰無仮説を前提とした統計量 T は棄却域に入っていない。
　よって、帰無仮説を受容することになる。
　つまり、2つの標本の確率分布は同じであると判断される（付図15）。

なお、確率変数 Y_i に着目して検定した経緯を以下に示す。
m = 10, n = 7 として計算する。
　W = (2 + 4 + 6 + 7 + 10 + 11 + 12 + 14 + 16 + 17) = 99
　E [W] = 10 ∗ (10 + 7 + 1) / 2 = 90
　V [W] = 10 ∗ 7 ∗ (10 + 7 + 1) / 12 = 105
従って、
　T = (99 − 90) / $105^{1/2}$ = 0.278
標準正規分布の両側 5 % 有意水準で、
　（下側棄却域 2.5 % の統計量 = − 1.960) < −0.878
なお、p 値 = 1 − NORMDIST (0.278, 0, 1, true)
　　　= 0.391 > 0.025 (上側 2.5 % 有意水準）
帰無仮説を前提とした統計量 T は棄却域に入っていない。
帰無仮説を受容することになる。
つまり、2つの標本の確率分布は同じであると判断される。

従って、この確率変数 Y_i に着目した検定結果は、確率変数 X_i に着目
検定結果と同じ結果になることを確認できる。

参考にした資料

石井俊全：「意味がわかる統計学」、 ベレ出版
向後千春、冨永敦子：「統計学が分かる」、 技術評論社
涌井良幸、涌井貞美：「中学数学でわかる統計の授業」、 日本実業出版
涌井良幸、涌井貞美：「統計学の図鑑」、 技術評論社
阿部真人：「データ分析に必須の知識・考え方　統計学入門」、 ソシム
西内啓：「統計学が最強の学問である【実践編】」、 ダイヤモンド社
永田靖：「サンプルサイズの決め方」、朝倉書店
上田拓治：「44の例題で学ぶ統計的検定と推定の解き方」、 オーム社
小針晛宏：「確率・統計入門」、 岩波書店
新米夫婦のふたりごと：「実対称行列の性質と直交行列による対角化」、 実対称行列の性質と直交行列による対角化 | 新米夫婦のふたりごと (ramenhuhu.com)
AKITOの勉強チャンネル：「対称行列の直交行列による対角化」、 【線形代数#34】対称行列の直交行列による対角化 - YouTube
理数アラカルト：「二次形式標準形とは？」、 二次形式と標準形とは？ ～性質と具体例～ (証明付)　- 理数アラカルト - (risalc.info)
勉強しよう数学：「複素平面を利用して回転した楕円の方程式を得る」、 勉強しよう数学: 複素数平面を利用して回転した楕円の方程式を得る (schoolhmath.blogspot.com)
高校数学の美しい物語：「多変数のガウス積分」、多変数のガウス積分 | 高校数学の美しい物語 (manabitimes.jp)
山下雄史（京都大学）：「多変数のガウス積分」、【高校数学+アルファ】多変数のガウス積分 - YouTube
スキマ時間で医療統計：「αエラー・βエラーとは何か？」、 【解説】αエラー・βエラーとは何か？ |「統計学的に有意」の限界 - YouTube
佐藤俊哉（京都大学）： 統計的優位性とP値に関するASA声明、 ASA.pdf (biometrics.gr.jp)
NHN TECHORUS Corp. ：「サンプルサイズの決め方」、統計的仮説検定とは？サンプルサイズの決め方も解説 | NHN テコラス Tech Blog | AWS、機械学習、IoTなどの技術ブログ (nhn-techorus.com)
ナッツの研究室：「G-Powerの使い方」、【G-Powerの使い方】無料のサンプルサイズ計算ソフトの操作方法を画像付きで分かりやすく解説！！ - ナッツの研究室 (natsu-laboratory.com)
Staat：「検定方法の選び方」、【完全版】検定方法の選び方 | Staat (corvus-window.com)
QCプラネッツ：「無相関の検定が分かる」、 無相関の検定がわかる (qcplanets.com)
ニャン太とラーメン：「回帰分析とは」、 QC検定2級：回帰分析：最小二乗法：残差変動 | ニャン太とラーン (nyantablog.com)
とけたろう：「一元配置分散分析」、一元配置分散分析【中学の数学からはじめる統計検定2級講座第16回】 | とけたろうブログ (toketarou.com)
BellCurve 統計WEB： 二元配置分散分析の分散分析表、30-1. 二元配置分散分析の分散分析表1 | 統計学の時間 | 統計WEB (bellcurve.jp)
浜田知久馬（東京理科大学）： SASによる共分散分析、共分散分析 ANCOVA (sas.com)
ウサギさんの統計学サロン：「ウィルコクソンの符号付順位検定」、【統計学】ウィルコクソンの符号順位検定 (multivariate-statistics.com)
ウサギさんの統計学サロン：「ウイルコクソンの順位和検定」、 【統計学】ウィルコクソンの順位和検定 (multivariate-statistics.com)
Hatsudy：総合学習サイト：「符号検定とウィルコクソンの符号順位検定によるノンパラメトリック検定、符号検定とウィルコクソンの符号順位検定によるノンパラメトリック検定 ｜ Hatsudy：総合学習サイト
すきま時間で医療統計：「多重検定の問題とは」、 【解説】多重検定の問題とは | 仮説生成と仮説検証 - YouTube