

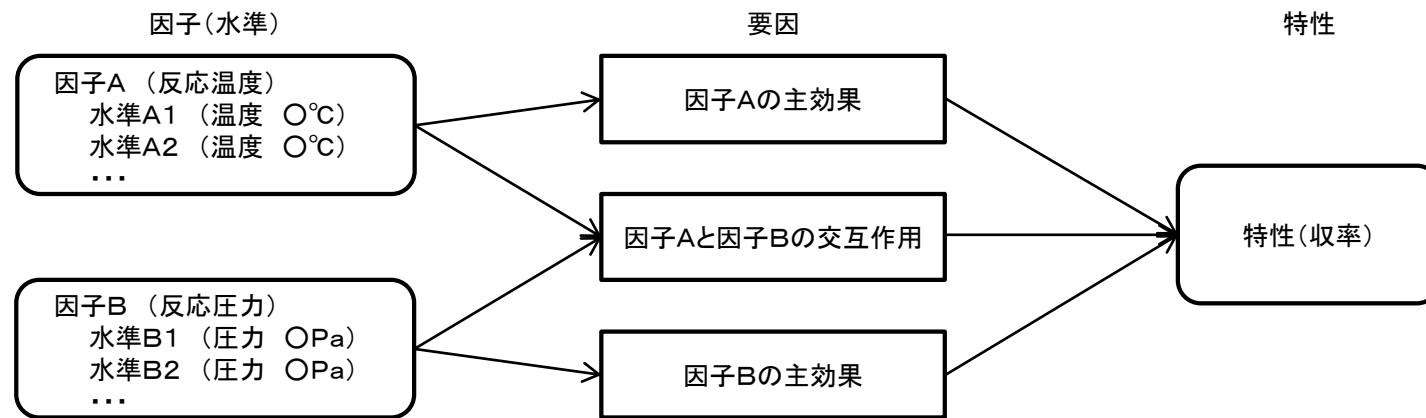
実験計画法の概要

2020年 ver. 1.1
倉谷 隆博

7-1. 実験計画法とは (Design of Experiments)

実験では、実験の目的を明確にした上でそれに沿った実験を計画実施し、得られたデータを解析する。質の高い実験のための計画があってこそ、質の高いデータが得られる(ガベージイン・ガベージアウト、つまりゴミを入れればゴミしか出てこない、にしてはならない)。実験計画法は、1) 実験の計画と実施、そして2) 実験結果(データ)の統計解析で構成される。この資料では、1) のなかの実験の計画フェーズに絞って実験計画法のポイントを整理する。

化学反応で、収率を最大化する反応温度と反応圧力を実験で決定する実験計画の事例を挙げる。実験計画法では実験の結果(関心事)を「特性」という。事例では収率が特性になる。**特性に影響を及ぼしている可能性のあるものを「因子」という。**事例では反応温度と反応圧力が因子になる。また、**因子が特性に及ぼす効果の種類を「要因」という。**要因には因子が特性に直接影響を及ぼす「主効果」と、**因子の組み合わせで特性に影響を及ぼす「交互作用」がある。**実験では、因子の値(これを水準という)を変化させて因子が特性に与える影響の変化を調べる。得られた実験データをもとに、取り上げた因子が特性に影響を与えているかどうかの判断をする(分散分析)。また、影響を与えている因子に関しては、特性の値を最大(最小)にする因子の値(最適水準)を求めたりする。



(図1) 実験系

■ フィッシャーの3原則

実験はいろいろな条件の組み合わせで実施することになるが、統計分析を前提に実験を行うときに必要とされるのが、フィッシャーの3原則である。

フィッシャーの3原則の目的は、統計分析の「誤差」を小さくすることである。

- 1) 繰返し : 同一条件のもとで実験を繰返すことによって、偶然生じた違い(偶然誤差)を相殺する。
- 2) 無作為化 : 比較したい条件を無作為に(ランダムに)割り振ることによって、系統誤差の影響を小さくする。
(注) 系統誤差とは、実験の順番や時間、場所などの違いによって測定結果に生じる、ある一定の傾向がある誤差のこと。
- 3) 局所管理 : 細分化(ブロック化)した実験対象ごとに実験順序や時間、場所などの条件を極力均一にした状態にして、系統誤差の影響を更に小さくする。

1) + 2) の組み合わせを「完全無作為化法」と呼ぶ。また、ブロック内で「完全無作為化法」を行う、つまり、1) + 2) + 3) の組み合わせを「乱塊法」と呼ぶ。

7-2. 一元配置実験

ここで説明する一元配置実験も次頁で説明する二次元配置実験も、取り上げた因子の水準の組み合わせ全てを対象に実験を実施する「要因配置実験」である。一元配置実験では、特性に影響を与える因子として一つだけ選択し、その因子について複数の水準を選び、複数回の実験をランダムな順序で行う。

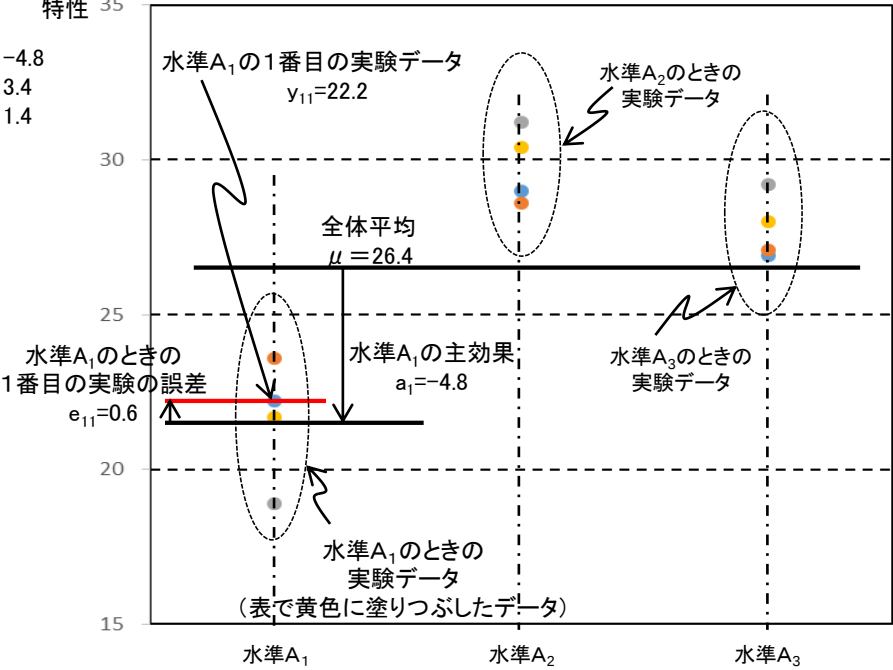
・一元配置の構造モデル： $y_{in} = \mu + a_i + e_{in}$

- i: 因子Aのi番目の水準 A_i (水準番号 = 1, 2, ..., I)
- n: 水準 A_i のときの、n番目の実験 (実験番号 = 1, 2, ..., N)
- y_{in} : 水準 A_i のときの、n番目の実験データ (特性)
- μ : 全体平均
- a_i : 水準 A_i のときの主効果
- e_{in} : S水準 A_i のときの、n番目の実験データの誤差

実験データ 特性 (y_{in})				全体平均 (μ)				水準 A_1 の主効果 (a_i)				誤差 (e_{in})			
	水準 A_1	水準 A_2	水準 A_3		水準 A_1	水準 A_2	水準 A_3		水準 A_1	水準 A_2	水準 A_3		水準 A_1	水準 A_2	水準 A_3
n=1	22.2	29.0	26.9	=	26.4	26.4	26.4	+	-4.8	3.4	1.4	+	0.6	0.8	-0.9
n=2	23.6	28.6	27.1		26.4	26.4	26.4		-4.8	3.4	1.4		2.0	-1.2	-0.7
n=3	18.9	31.2	29.2		26.4	26.4	26.4		-4.8	3.4	1.4		-2.7	1.4	1.4
n=4	21.7	30.4	28.0		26.4	26.4	26.4		-4.8	3.4	1.4		0.1	0.6	0.2

特性 35

μ = 全体平均値 = 平均値 (22.2, 23.6, 18.9, 21.7, 29.0, 28.6, 31.2, 30.4) = 26.4
 a_1 = 水準 A_1 のときの主効果 = 平均値 (22.2, 23.6, 18.9, 21.7) - μ = 21.6 - 26.4 = -4.8
 a_2 = 水準 A_2 のときの主効果 = 平均値 (29.0, 28.6, 31.2, 30.4) - μ = 29.8 - 26.4 = 3.4
 a_3 = 水準 A_3 のときの主効果 = 平均値 (26.9, 27.1, 29.2, 28.0) - μ = 27.8 - 26.4 = 1.4
 $a_1 + a_2 + a_3 = -4.8 + 3.4 + 1.4 = 0$
 e_{11} = 実験データ y_{11} - (μ + 主効果 a_1) = 22.2 - (26.4 - 4.8) = 0.6
 e_{12} = 実験データ y_{12} - (μ + 主効果 a_1) = 23.6 - (26.4 - 4.8) = 2.0
 e_{13} = 実験データ y_{13} - (μ + 主効果 a_1) = 18.9 - (26.4 - 4.8) = -2.7
 e_{14} = 実験データ y_{14} - (μ + 主効果 a_1) = 21.7 - (26.4 - 4.8) = 0.1
 $e_{11} + e_{12} + e_{13} + e_{14} = 0.6 + 2.0 - 2.7 + 0.1 = 0$
 e_{21} = 実験データ y_{21} - (μ + 主効果 a_2) = 29.0 - (26.4 + 3.4) = -0.8
 e_{22} = 実験データ y_{22} - (μ + 主効果 a_2) = 28.6 - (26.4 + 3.4) = -1.2
 e_{23} = 実験データ y_{23} - (μ + 主効果 a_2) = 31.2 - (26.4 + 3.4) = 1.4
 e_{24} = 実験データ y_{24} - (μ + 主効果 a_2) = 30.4 - (26.4 + 3.4) = 0.6
 $e_{21} + e_{22} + e_{23} + e_{24} = -0.8 - 1.2 + 1.4 + 0.6 = 0$
 e_{31} = 実験データ y_{31} - (μ + 主効果 a_3) = 26.9 - (26.4 + 1.4) = -0.9
 e_{32} = 実験データ y_{32} - (μ + 主効果 a_3) = 27.1 - (26.4 + 1.4) = -0.7
 e_{33} = 実験データ y_{33} - (μ + 主効果 a_3) = 29.2 - (26.4 + 1.4) = 1.4
 e_{34} = 実験データ y_{34} - (μ + 主効果 a_3) = 28.0 - (26.4 + 1.4) = 0.2
 $e_{31} + e_{32} + e_{33} + e_{34} = -0.9 - 0.7 + 1.4 + 0.2 = 0$



(図2)一元配置構造モデルの例

7-3. 二元配置実験(交互作用がある場合)

交互作用のない二元配置実験の考え方は、一元配置実験と変わることはない。ここでは、特性に影響を与える因子として二つの因子を選び、かつ事前のあたり実験で因子間の交互作用が確認された場合の二元配置実験について説明する。2つの因子について複数の水準を選び、複数回の実験をランダムな順序で行う。

・二元配置の構造モデル(交互作用がある場合) : $y_{ijn} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + e_{ijn}$

i

: 因子Aのi番目の水準 A_i (水準番号 = 1, 2, ..., I)

j

: 因子Bのj番目の水準 B_j (水準番号 = 1, 2, ..., J)

n

: 水準 A_i で水準 B_j のときの、n番目の実験 (実験番号 = 1, 2, ..., N)

y_{ijn}

: 水準 A_i で水準 B_j のときの、n番目の実験データ(特性)

μ

: 全体平均

a_i

: 水準 A_i のときの主効果

b_j

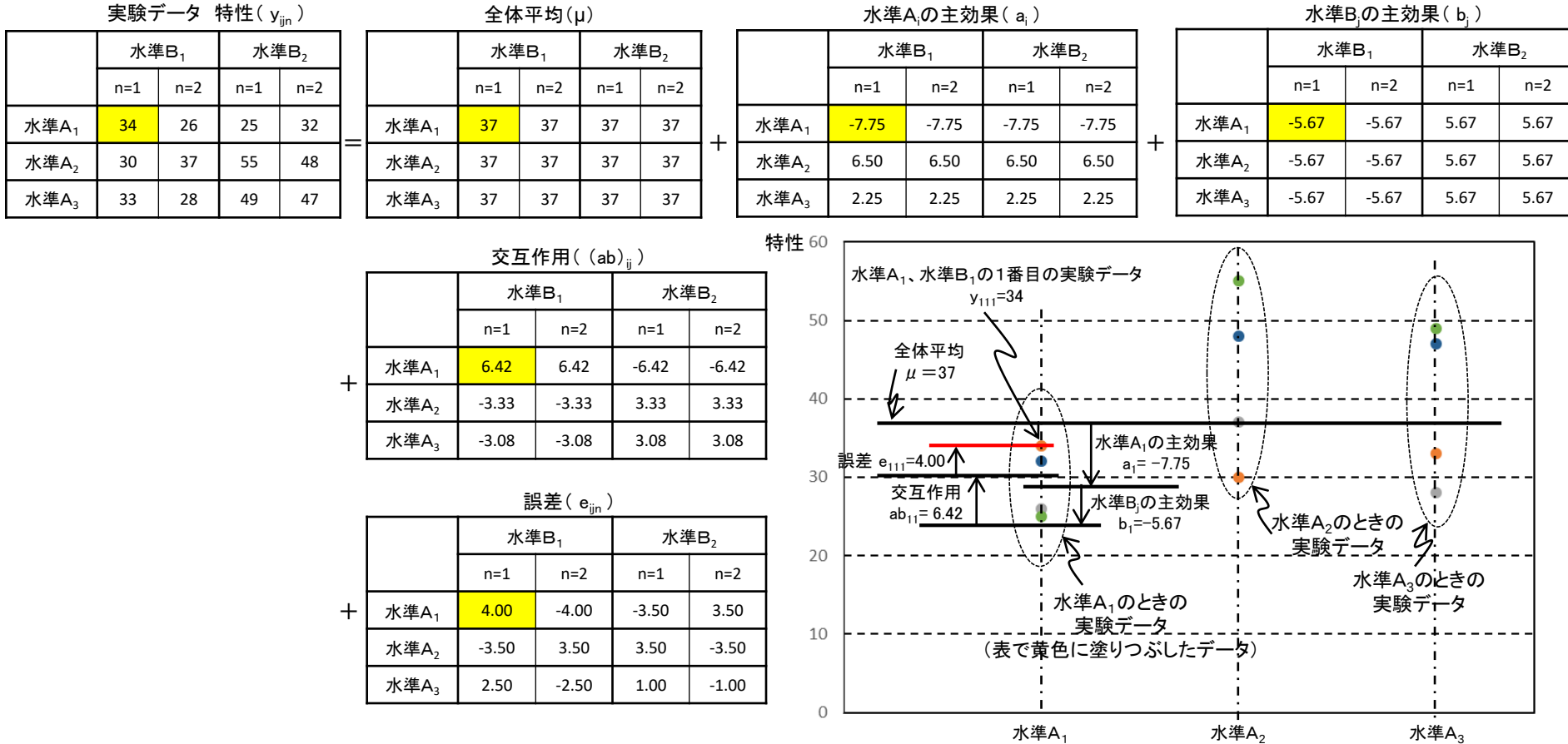
: 水準 B_j のときの主効果

$(ab)_{ij}$

: 水準 A_i と水準 B_j との交互作用

e_{ijn}

: 水準 A_i で水準 B_j のときの、n番目の実験データの誤差



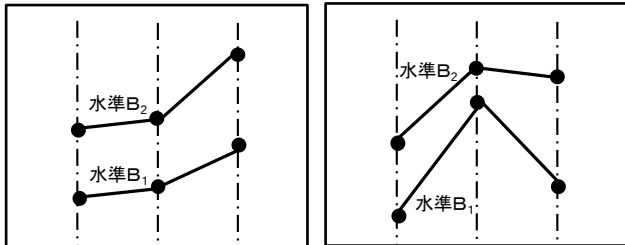
(図3) 二元配置構造モデル(交互作用がある場合)の例

7-4. 二元配置実験(7-3)の補足説明

■交互作用の事前確認

構造モデルを適用する場合、交互作用の有無を事前確認しておく必要がある。2因子の場合(二元配置実験の場合)で、交互作用が存在しない場合(図4)は、因子Aの水準ごとの因子B水準違いの影響はほぼ同じである。言い換えれば因子Bの影響は因子Aの値に依存しない。(図4)の2本の線は平行に近い。一方、交互作用が存在する場合(図5)は、因子Aの水準ごとの因子B水準違いの影響は因子Aの水準によって差がある。この場合、(図5)の2本の線は平行にならない。なお、この2本の線がクロスするときは、非常に強い交互作用がある場合である。

7-3. の事例は、(図6)に示すように、桃色の線の束(水準B₁)と緑色の線の束(水準B₂)は平行の関係にあるとはいえない。つまり、この事例は因子Aと因子Bの交互作用が存在する事例であるとみなせる。

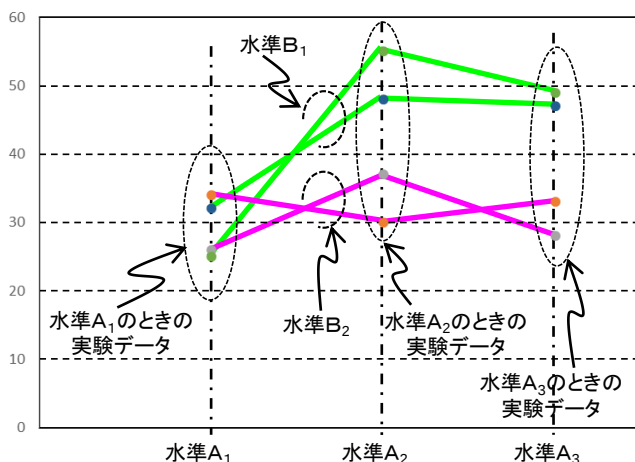


水準A₁ 水準A₂ 水準A₃

(図4) 交互作用がない場合

水準A₁ 水準A₂ 水準A₃

(図5) 交互作用がある場合



(図6) 7-3. の事例

■数値計算の詳細(下段では、誤差の再計算を実施)

μ = 全体平均値 (34,26,30,37,33,28,25,32,55,48,49,47) = 37

主効果 a_1 = 水準A₁の平均値 (34,26,25,32) - μ = 29.25 - 37 = -7.75

主効果 a_2 = 水準A₂の平均値 (30,37,55,48) - μ = 42.50 - 37 = 5.50

主効果 a_3 = 水準A₃の平均値 (33,28,49,47) - μ = 39.25 - 37 = 2.25

主効果 b_1 = 水準A₁の平均値 (34,26,30,37,33,28) - μ = 31.33 - 37 = -5.67

主効果 b_2 = 水準A₂の平均値 (25,32,55,48,49,47) - μ = 42.67 - 37 = 5.67

$a_1 + a_2 + a_3 = -7.75 + 5.50 + 2.25 = 0$, $b_1 + b_2 = -5.67 + 5.67 = 0$

e_{111} = 実験データ y_{111} - (μ + 主効果 a_1 + 主効果 b_1) = 34 - (37 - 7.75 - 5.67) = 10.42

e_{112} = 実験データ y_{112} - (μ + 主効果 a_1 + 主効果 b_1) = 26 - (37 - 7.75 - 5.67) = 2.42

e_{211} = 実験データ y_{211} - (μ + 主効果 a_2 + 主効果 b_1) = 30 - (37 + 5.5 - 5.67) = -6.83

e_{212} = 実験データ y_{212} - (μ + 主効果 a_2 + 主効果 b_1) = 37 - (37 + 5.5 - 5.67) = 0.17

e_{311} = 実験データ y_{311} - (μ + 主効果 a_3 + 主効果 b_1) = 33 - (37 + 2.25 - 5.67) = -0.58

e_{312} = 実験データ y_{312} - (μ + 主効果 a_3 + 主効果 b_1) = 28 - (37 + 2.25 - 5.67) = -5.58

e_{121} = 実験データ y_{121} - (μ + 主効果 a_1 + 主効果 b_2) = 25 - (37 - 7.75 + 5.67) = -9.92

e_{122} = 実験データ y_{122} - (μ + 主効果 a_1 + 主効果 b_2) = 32 - (37 - 7.75 + 5.67) = -2.92

e_{221} = 実験データ y_{221} - (μ + 主効果 a_2 + 主効果 b_2) = 55 - (37 + 5.5 + 5.67) = 6.83

e_{222} = 実験データ y_{222} - (μ + 主効果 a_2 + 主効果 b_2) = 48 - (37 + 5.5 + 5.67) = -0.17

e_{321} = 実験データ y_{321} - (μ + 主効果 a_3 + 主効果 b_2) = 49 - (37 + 2.25 + 5.67) = 4.08

e_{322} = 実験データ y_{322} - (μ + 主効果 a_3 + 主効果 b_2) = 47 - (37 + 2.25 + 5.67) = 2.08

$e_{111} + e_{112} + e_{211} + e_{212} + e_{311} + e_{312} = 10.42 + 2.42 - 6.83 + 0.17 - 0.58 - 5.58 = 0$ (0.02)

$e_{121} + e_{122} + e_{221} + e_{222} + e_{321} + e_{322} = -9.92 - 2.92 + 6.83 - 0.17 + 4.08 + 2.08 = 0$ (-0.02)

交互作用 $(ab)_{11} = (e_{111} + e_{112}) / 2 = (10.42 + 2.42) / 2 = 6.42$

交互作用 $(ab)_{21} = (e_{211} + e_{212}) / 2 = (-6.83 + 0.17) / 2 = -3.33$

交互作用 $(ab)_{31} = (e_{311} + e_{312}) / 2 = (-0.58 - 5.58) / 2 = -3.08$

交互作用 $(ab)_{12} = (e_{121} + e_{122}) / 2 = (-9.92 - 2.92) / 2 = -6.42$

交互作用 $(ab)_{22} = (e_{221} + e_{222}) / 2 = (-6.83 + 0.17) / 2 = 3.33$

交互作用 $(ab)_{32} = (e_{321} + e_{322}) / 2 = (4.08 + 2.08) / 2 = 3.08$

$(ab)_{11} + (ab)_{21} + (ab)_{31} = 6.42 - 3.33 - 3.08 = 0$ (0.01), $(ab)_{12} + (ab)_{22} + (ab)_{32} = -6.42 + 3.33 + 3.08 = 0$ (-0.01)

$(ab)_{11} + (ab)_{12} = 0$, $(ab)_{21} + (ab)_{22} = 0$, $(ab)_{31} + (ab)_{32} = 0$

e_{111} = 実験データ y_{111} - (μ + 主効果 a_1 + 主効果 b_1 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 34 - (37 - 7.75 - 5.67 + 6.42) = 4

e_{112} = 実験データ y_{112} - (μ + 主効果 a_1 + 主効果 b_1 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 26 - (37 - 7.75 - 5.67 + 6.42) = -4

e_{211} = 実験データ y_{211} - (μ + 主効果 a_2 + 主効果 b_1 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 30 - (37 + 5.5 - 5.67 - 3.33) = -3.5

e_{212} = 実験データ y_{212} - (μ + 主効果 a_2 + 主効果 b_1 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 37 - (37 + 5.5 - 5.67 - 3.33) = 3.5

e_{311} = 実験データ y_{311} - (μ + 主効果 a_3 + 主効果 b_1 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 33 - (37 + 2.25 - 5.67 - 3.08) = 2.5

e_{312} = 実験データ y_{312} - (μ + 主効果 a_3 + 主効果 b_1 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 28 - (37 + 2.25 - 5.67 - 3.08) = -2.5

e_{121} = 実験データ y_{121} - (μ + 主効果 a_1 + 主効果 b_2 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 25 - (37 - 7.75 + 5.67 - 6.42) = -3.5

e_{122} = 実験データ y_{122} - (μ + 主効果 a_1 + 主効果 b_2 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 32 - (37 - 7.75 + 5.67 - 6.42) = 3.5

e_{221} = 実験データ y_{221} - (μ + 主効果 a_2 + 主効果 b_2 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 55 - (37 + 5.5 + 5.67 + 3.33) = 3.5

e_{222} = 実験データ y_{222} - (μ + 主効果 a_2 + 主効果 b_2 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 48 - (37 + 5.5 + 5.67 + 3.33) = -3.5

e_{321} = 実験データ y_{321} - (μ + 主効果 a_3 + 主効果 b_2 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 49 - (37 + 2.25 + 5.67 + 3.08) = 1

e_{322} = 実験データ y_{322} - (μ + 主効果 a_3 + 主効果 b_2 + 相互作用 $(ab)_{11}$) = 47 - (37 + 2.25 + 5.67 + 3.08) = -1

$e_{111} + e_{112} + e_{211} + e_{212} + e_{311} + e_{312} = 4 - 4 - 3.5 + 3.5 + 2.5 - 2.5 = 0$

$e_{121} + e_{122} + e_{221} + e_{222} + e_{321} + e_{322} = -3.5 + 3.5 + 3.5 - 3.5 + 1 - 1 = 0$

7-5. 部分配置実験

特性に、どんな因子がどの程度の影響を及ぼしているのかを調べるにあたっては、あたり実験から始める。特性に影響を与える可能性のある因子を複数取り上げて実験することになる。しかし、因子ごとの水準を2水準とか3水準に絞っても因子が沢山あればその組み合わせ数は多くなる(例えば、繰り返し数2回で3因子2水準の実験で $2^3 \times 2 = 16$ 回、4因子2水準の実験で $2^4 \times 2 = 32$ 回)。また因子間の交互作用の数も増える(3因子で4、4因子で9)。このように、取り上げる因子を決めるためのあたり実験ですべての水準の組み合わせで実験することは実験回数が多くなり非現実的である。また、交互作用は2因子間の交互作用のなかから意味のある交互作用に絞って考慮すれば充分である(3因子以上の因子間の交互作用は意味付けすること自体が難しい)。

そこで、一部の水準の組み合わせに絞って、また交互作用に関しては2因子間の交互作用から考慮すべきものを選択し、特性に影響を与える要因(主効果と交互作用)を見出す方法が考案された。これが部分配置実験であり、その実現手段として直交配列表が用いられる。

(表1) 4因子2水準のすべての組み合わせ

実験番号	因子A	因子B	因子C	因子D
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2
3	1	1	2	1
4	1	1	2	2
5	1	2	1	1
6	1	2	1	2
7	1	2	2	1
8	1	2	2	2
9	2	1	1	1
10	2	1	1	2
11	2	1	2	1
12	2	1	2	2
13	2	2	1	1
14	2	2	1	2
15	2	2	2	1
16	2	2	2	2

- 1) どの2つの因子を選んでも、水準が(1, 1)、(1, 2)、(2, 1)、(2, 2)の組み合わせ数は同数である。
- 2) 実験番号1~8の特性値の総和 = $8\mu + 8a_1 + 4(b_1+b_2) + 4(c_1+c_2) + 4(d_1+d_2) + \text{誤差}$
ここで、 μ は全体平均、 $a_1+a_2=0, b_1+b_2=0, \dots$ (主効果 $a_1, a_2, b_1, \dots$ は μ からのズレ)
なので、実験番号1~8の特性値の総和 = $8\mu + 8a_1 + \text{誤差} \dots \text{①}$
同様に、実験番号9~16の特性値の総和 = $8\mu + 8a_2 + \text{誤差} \dots \text{②}$
よって、① - ② = $8(a_1-a_2) + \text{誤差} \dots \text{③}$
③の「差」を、因子Aの水準の違いによる効果とみなすことができる。
- 3) 他の因子B、C、Dについても同様にそれぞれの効果を確認できる。

(表2) (表1)の実験番号から。表(1)の1)が成立するように選んだもの

実験番号	因子A	因子B	因子C	因子D
1	1	1	1	1
4	1	1	2	2
6	1	2	1	2
7	1	2	2	1
9	2	1	1	1
12	2	1	2	2
14	2	2	1	2
15	2	2	2	1

この表は、(表1)からどの2つの因子を選んでも(1, 1)、(1, 2)、(2, 1)、(2, 2)の組み合わせ数が4つ(同数)になるように選択したものである。よって、(表1)と同じように因子A、因子B、因子C、因子D、それぞれの効果を、この水準の組み合わせの実験から求めることができる。

(表3) (表2)の実験の一部の実験番号を変更したもの

実験番号	因子A	因子B	因子C	因子D
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2
6	1	2	1	2
8	1	2	2	2
9	2	1	1	1
12	2	1	2	2
14	2	2	1	2
15	2	2	2	1

この表は、(表1)の1)が成立していない。よってこの水準の組み合わせの実験からは因子の影響を分離して求めることができない。

7-6. 直交配列表

7-5の(表1)は因子水準のすべての組み合わせ実験を示しており、実験パターンは16通りになる。しかし、主効果だけの確認ができればいいのであれば(表2)のように実験パターンを8通りに絞り込むことができる。

しかし、主効果の他に交互作用がある場合にはその確認も必要である。(表4)は、(表2)の因子A、B、C、Dをそれぞれ列[1]、「2」、[4]、[6]に配置し、そこに列[3]、[5]、[7]の3列を追加した $L_8(2^7)$ の直交配列表と呼ばれる、実験パターンを示す表である。2水準の7因子で $2^3=8$ 通りの実験パターンを示している。直交配列表で列への主効果と交互作用の割り付け方法は、直交配列表の最下段の「成分」のところに記載されている(主効果はa,b,cの3つに絞る、交互作用はab,bc,ca,abcの4つに絞る)。なお、交互作用の有無で[3]、[5]、[6]の割り付けは変更可能。また、3因子の交互作用abcは無視し列[7]には誤差を割り付ける。

- 1) 交互作用がない場合(表5)には、列「3」、[5]、[6]に、列[1]、列[2]、列「4」とは別の3つの因子を割り当てる。この場合、列[1]から列[6]に6つの因子、そして、列[7]に誤差を割り付けることになる。
- 2) 交互作用がある場合(表6)は、列[3]に列[1]と列[2]との交互作用、列[5]に列[4]と列[1]との交互作用、列[6]に列[2]と列[4]との交互作用の確認に割り付けることができる(最大3つの交互作用)。なお、交互作用の確認に使わない列には新たな因子を割り付けてもいい。また、列[7]は誤差に割り付ける。
- 3) 交互作用があるにも関わらずその列に新たな因子を割り付けた場合、例えば主効果Cを列[3]に割り付けた場合、列「3」に現れる効果が因子Cの主効果なのか、それとも因子Aと因子Bの交互作用なのかを区別できなくなる(これを、**要因の「交絡」**という)。このような割り付けは避けなければならない。

なお、直交配列表としては、(表4)の $L_8(2^7)$ のほか、 $L_{16}(2^{15})$ 、 $L_{32}(2^{31})$ 、 $L_9(3^4)$ 、 $L_{27}(3^{13})$ 、 $L_{18}(2^1 \times 3^7)$ などがある。

(表4) $L_8(2^7)$ の直交表

実験番号	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
成分	a	b	ab	c	ca	bc	abc

(補足説明) 列[1]と列[2]の交互作用は列[3]に現れる。因子Aと因子Bの交互作用は、 $(ab)_{11}, (ab)_{12}, (ab)_{21}, (ab)_{22}$ で表される。水準 A_1 のとき水準 B_1 の交互作用は $(ab)_{11}$ であり、全体平均に対しての $(ab)_{11}$ である。同様に、水準 A_1 のとき水準 B_2 の交互作用は $(ab)_{12}$ であり、全体平均に対しての $(ab)_{12}$ である。これらの交互作用は相殺されて全体平均になるので、7-4の計算でも確認できるが、 $(ab)_{11} + (ab)_{12} = 0$ になる。同様に、 $(ab)_{21} + (ab)_{22} = 0$ 、 $(ab)_{11} + (ab)_{21} = 0$ 、 $(ab)_{12} + (ab)_{22} = 0$ である。(続く)

(続き) これらの関係から、 $(ab)_{11} = (ab)_{22}$ 、 $(ab)_{12} = (ab)_{21}$ となる。これは、実験番号1、2、7、8では列[1]と列[2]の交互作用が同じ値になり、実験番号3、4、5、6では列[1]と列[2]の交互作用が同じになることを示している。この結果は、列[3]の実験番号1、2、7、8の水準が同じ、つまりその影響である特性も同じ、また列[3]の実験番号3、4、5、6の水準が同じ、つまりその影響である特性も同じ、ということと同等であり、列[1]と列[2]の交互作用が列[3]に現れているとみていい。よって、列[3]の成分は列[1](成分a)と列[2](成分b)の交互作用を示す成分abになる。なお、直交配列表では、主効果は、 $2^0 = 1$ 、 $2^1 = 2$ 、 $2^2 = 4$ 、...の列に割り付けられるように設計されている。

(表5)交互作用を割り付けない場合

実験番号	A	B	D	C	E	F	誤差
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
成分	a	b	ab	c	ca	bc	abc

(表6)交互作用を割り付ける場合

実験番号	A	B	A×B	C	C×A	B×C	誤差
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
成分	a	b	ab	c	ca	bc	abc

7-7. 直交配列表の性質

部分配置実験に使用される直交配列表には、以下の性質がある。
(表4)の $L_8(2^7)$ の直交配列表をもとに、それぞれ水準1を-1、水準2を1の数値に置き換えて性質を整理する。

- 1) どの列の総和もゼロである。
例えば、列[3]の総和 = $1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 = 0 \quad \dots$ (図7)
- 2) 任意の2列の積和(内積とも言う)がゼロになる。この性質を「直交」という(直交配列表の名前の由来)。
列[5]と列[7]の積和 = $1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) = 0 \quad \dots$ (図8)
- 3) 任意の2列の水準の組み合わせは、2ずつの(1,1)、(1,-1)、(-1,1)、(-1,-1)で構成されている。
- 4) 任意の2列の相関係数はゼロである(相関がない)。
列[1]と列[4]の相関係数 = $\frac{\text{列[1]と列[4]の共分散}}{(\text{列[1]の標準偏差}) \times (\text{列[4]の標準偏差})}$
 $= \frac{\sum \{(\text{列[1]の値} - \text{列[1]の平均値}) \times (\text{列[4]の値} - \text{列[4]の平均値})\}}{[(\sum (\text{列[1]の値} - \text{列[1]の平均値})^2)^{1/2} \times (\sum (\text{列[4]の値} - \text{列[4]の平均値})^2)^{1/2}]}$
 $= \frac{\{(1-0) \times (1-0) + (1-0) \times (-1-0) + (1-0) \times (1-0) + (1-0) \times (-1-0) + (-1-0) \times (1-0) + (-1-0) \times (-1-0) + (-1-0) \times (1-0) + (-1-0) \times (-1-0)\}}{[(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + (-1-0)^2 + (-1-0)^2 + (-1-0)^2 + (-1-0)^2]^{1/2} \times [(1-0)^2 + (-1-0)^2 + (1-0)^2 + (-1-0)^2 + (1-0)^2 + (-1-0)^2 + (1-0)^2 + (-1-0)^2]^{1/2}}$
 $= 0 / (8^{1/2} \times 8^{1/2}) = 0 \quad \dots$ (図9)

(表7) $L_8(2^7)$ の直交表を「数値」に置き換えた表

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	1	-1	1
-1	-1	1	1	-1	-1	1
-1	-1	1	-1	1	1	-1

総和

0

(図7)列の総和

[3]
1
1
-1
-1
-1
-1
1
1

[5]	×	[7]	=	
1	×	1	=	1
-1	×	-1	=	1
1	×	-1	=	-1
-1	×	1	=	-1
-1	×	-1	=	1
1	×	1	=	1
-1	×	1	=	-1
1	×	-1	=	-1

積和

0

(図8)2列の積和

[1]	[4]
1	1
1	-1
1	1
1	-1
-1	1
-1	-1
-1	1
-1	-1

と

との相関係数 = 0

(図9)2列の相関係数

なお、任意の2列は直交していること(任意の2列の相関係数がゼロであること)から、直交配列表の因子を使用した重回帰分析を行う場合、多重共線性は発生しないことが保証されている。

参考にした書籍

河本薫：「会社を変える分析の力」、講談社現代新書

小山昇：「数字は人格」、ダイヤモンド社

永野裕之：「ビジネス×数学＝最強」、すばる舎

竹内薫：「数学×思考＝ざっくりといかにして問題をとくか」、丸善出版

中西達夫：「統計データをすぐに分析できる本」、アニモ出版

中西達夫：「すぐれた判断が統計データ分析から生まれる」、実務教育出版

豊田裕貴：「マンガでわかる ビジネスを成功に導くデータ分析」、ナツメ社

向後千春、富永敦子：「統計学がわかる」、技術評論社

石井俊全：「意味がわかる統計学」、ベレ出版

涌井良幸、涌井貞美：「中学数学でわかる統計の授業」、日本実業出版

涌井良幸、涌井貞美：「統計学の図鑑」、技術評論社

西内啓：「統計学が最強の学問である」、ダイヤモンド社

西内啓：「統計学が最強の学問である(実践編)」、ダイヤモンド社

西内啓：「統計学が最強の学問である(ビジネス編)」、ダイヤモンド社

森岡毅、今西聖貴：「確率思考の戦略論」、角川書店

デビッド・マクアダムス：「世界一流企業はゲーム理論で決めている」、ダイヤモンド社

河村真一ほか：「本物のデータ分析力が身に付く本」、日経BPムック

末吉正成、末吉美貴：「Excel ビジネス統計分析 この分析できますか?」、翔泳社

谷岡一郎：「社会調査のウソ リサーチ・リテラシーのすすめ」、文藝春秋

林知己夫：「調査の科学」、ちくま学芸文庫

八谷大岳：「データ解析」シリーズ 全15回、(例)[データ解析 第1回 ベクトルの復習 – YouTube](#)

森田浩：「これだけ! 実験計画法」、秀和システム

森田浩：「よくわかる最新実験計画法の基本と仕組み」、秀和システム

菅民郎：「例題とExcel演習で学ぶ実験計画法とタグチメソッド」、オーム社