統計的推定の手順

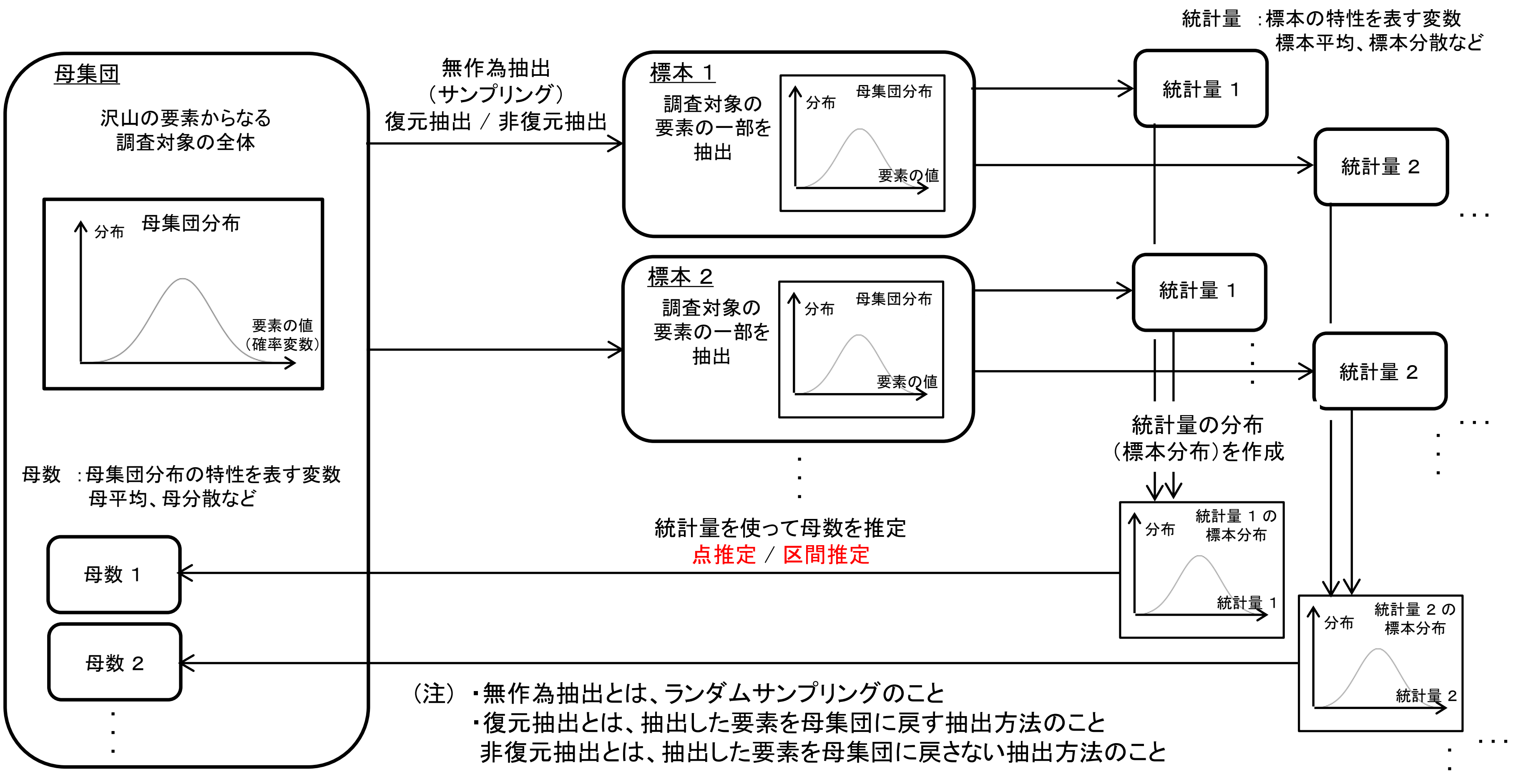
2022年9月（作成）

倉谷　隆博

1．母集団(population)と標本(sample)

資料「いろいろな確率分布」から再掲載(一部変更)

母集団と標本の関係を(図1)に整理しておく。
母集団は調査対象の全体を示す。母集団を構成する要素を確率変数として扱い、母集団の特性を確率分布を使って表す。従って、母集団の特性は母集団の平均(母平均)、母集団の分散(母分散)などの「母数」で表すことができる。「母数」は母集団に固有のものであり、固定の値をとる。一方、標本は母集団から要素の一部を抽出したものである。当然、抽出した要素は母集団の確率分布に従う。データ解析にあたっては、母集団全体を扱うことは現実的でないことが多い。その代わりに、抽出した標本を使って母集団の母数を推定することが現実的である(推測統計学)。母集団の特性を、標本の要素から計算する「統計量」(標本平均、標本分散など)を使って推定する。「統計量」は標本ごとに異なる値を取る確率変数である。
つまり、推測統計学では、標本の統計量を使って母集団の母数を推定する。例えば、標本平均の確率分布(標本分布)をもとに母平均を推定する。
この推定方法には、母数をピンポイントで推定する「点推定」(point estimation)と、推定幅を持って推定する「区間推定」(Interval estimation)がある。



(図1)母集団と標本の関係

2-1．点推定：不偏推定量(unbiased variance)

母数の点推定方法の一つが、不偏推定量による推定である。
不偏推定量による推定では、母平均の推定には標本平均が使用される。また、母分散の推定には標本分散ではなく不偏分散が使用される。
ここでは、μ（母集団の平均）、σ^2（母集団の分散）、S^2（標本の分散）、U^2（標本の不偏分散）、$X_1, X_2, \cdots, X_n$（標本データ）を使用する。

（1）不偏推定量(unbiased variance)とは

母数 θ の推定量を $\bar{\theta}$ としたとき、母数の推定値がとると期待される値（期待値）に関して、$E(\bar{\theta}) = \theta$ が成立するとき、
つまり、母数の推定量の期待値が母数と等しいとき（偏りがない、「不偏性」という）、これを満たす推定量（ここでは、$\bar{\theta}$）のことを、不偏推定量という。

（2）母平均の不偏推定量

標本平均 $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ の期待値は、

$$E(\bar{X}) = E[(1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i] = (1/n)E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = (1/n)\, n\, \mu = \mu \quad \cdots（式1）$$

となるので、母平均 μ の不偏推定量は、標本平均 $\bar{X}$ である。

（3）母分散の不偏推定量

標本平均 $\bar{X}$ の分散は、$V(\bar{X}) = V[\sum_{i=1}^{n} X_i/n] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i/n] = (1/n)^2 \sum_{i=1}^{n} V[X_i] = (1/n)^2\, n\, \sigma^2 = \sigma^2/n$ ・・・（式2）

一方、標本分散 S^2 の期待値は、$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = n(\sum_{i=1}^{n} X_i)/n - \sum_{i=1}^{n}\mu = n\bar{X} - n\mu = n(\bar{X} - \mu)$ であることと（式2）を使って、

$$E[S^2] = E[1/n \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2] = 1/n\, E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2] = 1/n\, E[\sum_{i=1}^{n}\{(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\}^2] = 1/n\, E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2]$$

$$= 1/n\, E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2] = 1/n\, E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2] = 1/n\,(E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2] - E[n(\bar{X} - \mu)^2])$$

$$= 1/n\,(\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu)^2] - n\,E[(\bar{X} - \mu)^2]) = 1/n \sum_{i=1}^{n} V[X_i] - V[\bar{X}] = (1/n)\, n\, \sigma^2 - \sigma^2/n = \sigma^2 - \sigma^2/n = \{(n-1)/n\}\sigma^2 \quad \cdots（式3）$$

（式3）は、標本データは標本平均の周辺に散らばっているが故に。標本分散 S^2 は母分散 σ^2 に比べて小さくなることを表している。
母分散 σ^2 の不偏推定量（不偏分散）を U^2 とすれば、つまり、$E[U^2] = \sigma^2$ とすれば、それは標本分散 S^2 の期待値ではなく、（式3）のとおり、標本分散 S^2 の期待値に $n/(n-1)$ を掛けたものになる。母分散 σ^2 の不偏推定量（不偏分散）U^2 の期待値は下式で表される（また、不偏分散の分散は付録1を参照）。

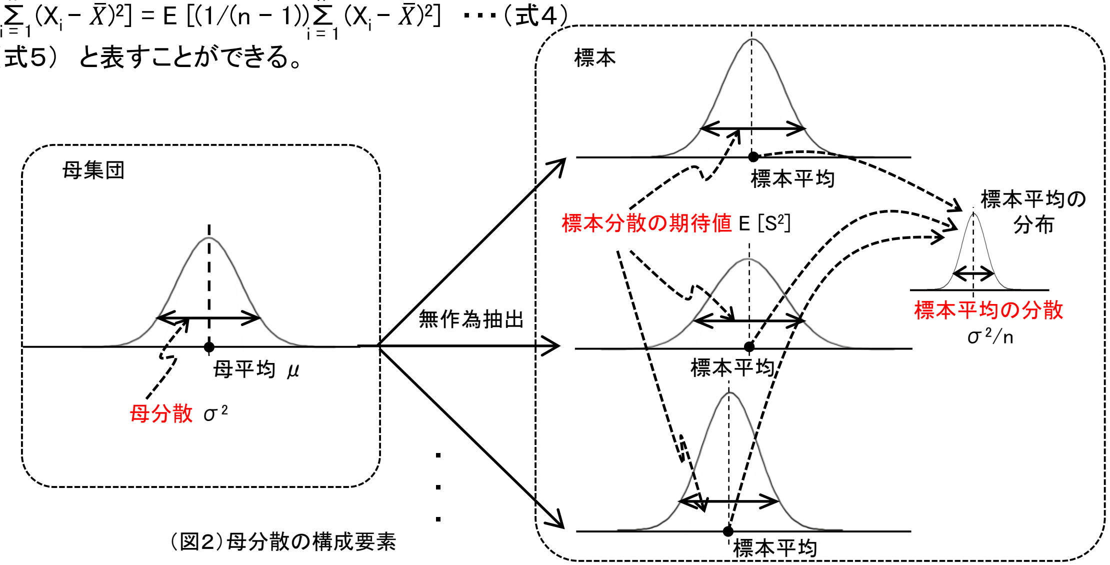
$$E[U^2] = \sigma^2 = (n/(n-1))\, E[S^2] = (n/(n-1))\, E[(1/n)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2] = E[(1/(n-1))\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2] \quad \cdots（式4）$$

よって、不偏分散は、$U^2 = (1/(n-1))\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ・・・（式5）と表すことができる。

ところで、（式3）を、$\sigma^2 = \sigma^2/n + E[S^2]$ と書き直せば、
母分散 ＝ 標本平均の分散 ＋ 標本分散の期待値となる。
この関係を模式図にしたのが、（図2）である。
データを無作為抽出する度に、変動する標本平均の分散を加味したものが母分散であることが分かる。
また、（式3）で、$n \to \infty$ とすると、$\sigma^2/n \to 0$, $E[S^2] \to \sigma^2$ となる。 n が十分大きい場合、母分散 σ^2 の不偏推定量は標本分散 S^2 に等しくなる。

・自由度

（式1）の n は自由度(degrees of freedom)と呼ばれている。
自由度は自由に決められる値の数である。平均を求める（式1）ではデータ数 n が自由度になる。また分散を求める（式4）では平均を使うため、自由に変化させることができるデータの数が 1 つ減り、自由度は n − 1 になる。

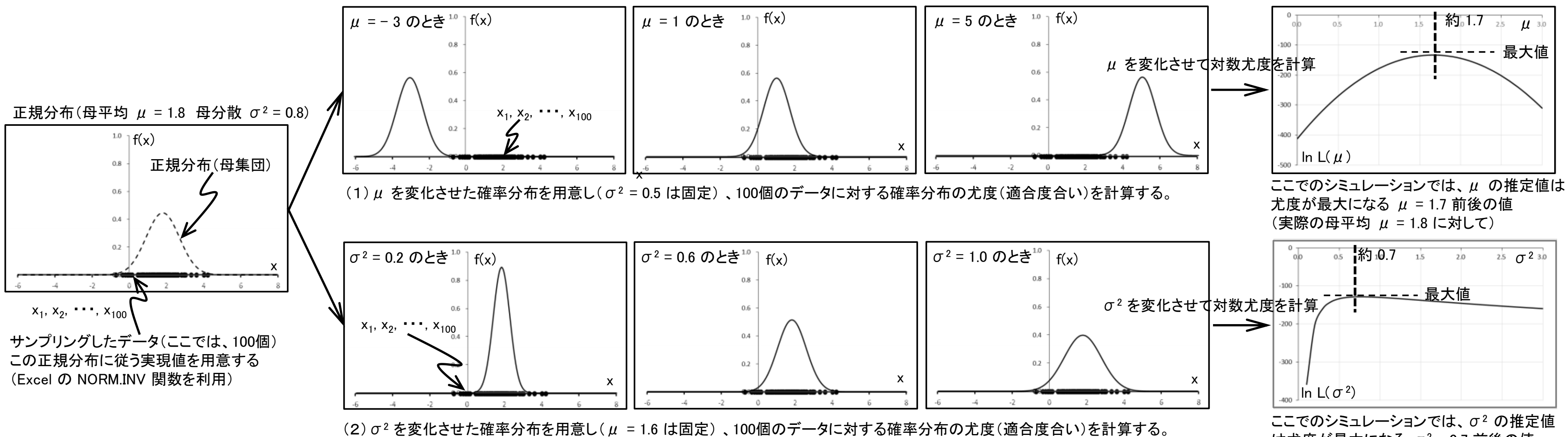


（図2）母分散の構成要素

2-2. 点推定：最尤法(maximum likelihood estimation)

点推定方法の一つが、最尤(さいゆう)法による母数の推定である。　　（注、「尤」には、「もっとも」、「すぐれる」などの意味がある）
母集団の確率分布関数の形は分かっているものの、母平均や母分散などの母数が分からないとき、標本データの母集団への当てはまり具合（尤度、ゆうど）を計算し、尤度が最大になるときの母数を母数の推定値とする方法が最尤法（さいゆうほう）である。

正規分布の母数である期待値 μ と分散 σ^2 を、標本データを使って最尤法によって推定する計算例で、最尤法のイメージを示す（図3）。



（図3）最尤法による母数の推定法のイメージ

正規分布の確率密度関数は、$f(x) = (1/(2\pi\sigma^2)^{1/2}) \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$ であるので、確率変数 X が実現値として $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をとるとき、その同時確率は、

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(x_1)P(x_2)\cdots P(x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = \prod_{i=1}^{n} (1/(2\pi\sigma^2)^{1/2}) \exp(-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)) \quad \cdots \text{（式6）}$$

（注： $\prod$ は積を表す記号）

確率変数 X の実現値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を使用して、母平均 μ と母分散 σ^2 を推定することを考える。
（式6）は、μ と σ^2 がある値のとき、実現値が得られる確率を表していると捉えることができる。実現値が得られる確率が最も高くなるときの μ と σ^2 がもっとも相応しい推定値であると考える。これが最尤法である。そこで、（式6）をもとに μ と σ^2 が変数であることを明示した尤度関数（式7）を導入する。（式7）は（式6）と同じであるが、（式6）では確率変数が変数、（式7）では母数を変数と捉える。なお、「尤度（ゆうど）」とはもっともらしさのことである。

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} (1/(2\pi\sigma^2)^{1/2}) \exp(-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)) \quad \cdots \text{（式7）}$$

また、演算を簡便化するため（関数の値の増減の方向は変えないで）、（式7）の自然対数をとる（対数尤度）。

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = n(\ln(1/2\pi\sigma^2)^{1/2}) - 1/(2\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = -(n/2)\ln(2\pi\sigma^2) - 1/(2\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \quad \cdots \text{（式8）}$$

（1）実現値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を得たとき（式8）を最大にする μ を求める。μ で偏微分して、0 とおく。

$$\partial(\ln L(\mu, \sigma^2))/\partial\mu = (1/\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = (1/\sigma^2)(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu) = 0$$

より、$\mu = (1/n)\sum_{i=1}^{n}x_i$　依って μ は、標本平均に等しい。

（2）実現値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を得たとき（式8）を最大にする σ^2 を求める。σ^2 で偏微分して、0 とおく。

$$\partial(\ln L(\mu, \sigma^2))/\partial\sigma^2 = -(n/2)(2\pi/(2\pi\sigma^2)) + (1/(2\sigma^4))\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = -n/(2\sigma^2) + (1/(2\sigma^4))\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

より、

$$\sigma^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

依って σ^2 は、標本分散に等しい。

母分散の推定値は、不偏推定量では不偏分散であったが、最尤法では標本分散になる。但し、標本サイズが大きくなれば、差はなくなる。

3. 主だった区間推定法の一覧表

（表１）区間推定法の一覧表

標本数	推定対象の母数	母集団と前提条件	推.定に使用する統計量	信頼度 100 (1 − α) % の推定区間
1	母平均 (μ)	正規分布 N (μ , σ^2) σ^2 ＝ 既知	$(\bar{X} - \mu) / (\sigma / n^{1/2})$ 〜 標準正規分布 N (0, 1^2)	$\bar{X} - z_{\alpha/2}\,(\sigma / n^{1/2}) \leqq \mu \leqq \bar{X} - z_{\alpha/2}\,(\sigma / n^{1/2})$
		未知の確率分布 σ^2 ＝ 未知、n = 大	$(\bar{X} - \mu) / (S / n^{1/2})$ 〜 標準正規分布 N (0, 1^2)	$\bar{X} - z_{\alpha/2}\,(S / n^{1/2}) \leqq \mu \leqq \bar{X} - z_{\alpha/2}\,(S / n^{1/2})$
		正規分布 N (μ , σ^2) σ^2 ＝ 未知、n = 小	$(\bar{X} - \mu) / (U / n^{1/2})$ 〜 自由度 n − 1 の t 分布	$\bar{X} - t_{\alpha/2}\,(n-1)\,(U / n^{1/2}) \leqq \mu \leqq \bar{X} - t_{\alpha/2}\,(n-1)\,(U / n^{1/2})$
	母分散 (σ^2)	正規分布 N (μ , σ^2) μ ＝ 既知	$\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\} / \sigma^2$ 〜 自由度 n のカイ二乗分布	$\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\} / \chi_{\alpha/2}(n) \leqq \sigma^2$ $\leqq \{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\} / \chi_{1-\alpha/2}(n)$
		正規分布 N (μ , σ^2) μ ＝ 未知	$\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\} / \sigma^2$ 〜 自由度 n − 1 のカイ二乗分布	$\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\} / \chi_{\alpha/2}(n-1) \leqq \sigma^2$ $\leqq \{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\} / \chi_{1-\alpha/2}(n-1)$
	母比率 (r)	正規分布 N (μ , σ^2) μ ＝ 未知、n = 大	$(R - r) / (r\,(1 - r) / n)^{1/2}$ 〜 標準正規分布 N (0, 1^2)	$R - z_{\alpha/2}\,(R\,(1-R))^{1/2} / n \leqq r \leqq R - z_{\alpha/2}\,(R\,(1-R))^{1/2}$
	相関係数 (ρ)	2 次元正規分布	$(n-3)^{1/2}\,(\zeta - \eta)$ 〜標準正規分布 N (0, 1^2)	$e^{2Z_L-1} / e^{2Z_L+1} \leqq \rho \leqq e^{2Z_U-1} / e^{2Z_U+1}$
2	母平均の差 ($\mu_X - \mu_Y$)	対応のある標本データ 正規分布 N (μ_X, σ_X^2), N (μ_Y, σ_Y^2) σ_X^2 , σ_Y^2 = 既知	$(\bar{D} - (\mu_X - \mu_Y)) / (U / n^{1/2})$ 〜 自由度 n − 1 の t 分布	$\bar{D} - t_{\alpha/2}\,(n-1)\,(U / n^{1/2}) \leqq \mu_X - \mu_Y$ $\leqq \bar{D} + t_{\alpha/2}\,(n-1)\,(U / n^{1/2})$
		対応のない標本データ 正規分布 N (μ_X, σ_X^2), N (μ_Y, σ_Y^2) σ_X^2 , σ_Y^2 = 既知	$((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)) / (\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2}$ 〜 標準正規分布 N (0, 1^2)	$(\bar{X} - \bar{Y}) - z_{\alpha/2}\,(\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y$ $\leqq (\bar{X} - \bar{Y}) + z_{\alpha/2}\,(\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2}$
		対応のない標本データ 正規分布 N (μ_X, σ_X^2), N (μ_Y, σ_Y^2) σ_X^2 , σ_Y^2 = σ^2 未知（等分散）	$\{((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)) / (1/m + 1/n)^{1/2}\} / U$ 〜 自由度 n + m − 2 の t 分布 但し、$U^2 = ((m-1)\,U_X^2 + (n-1)\,U_Y^2) / (m+n-2)$	$(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{\alpha/2}\,(m+n-2)\,\{(1/m + 1/n)\,U^2\}^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y$ $\leqq (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{\alpha/2}\,(n+m-2)\,\{(1/m + 1/n)\,U^2\}^{1/2}$
		対応のない標本データ 正規分布 N (μ_X, σ_X^2), N (μ_Y, σ_Y^2) σ_X^2 , σ_Y^2 = 未知	$\{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)\} / (U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^{1/2}$ 〜 自由度 f の t 分布 但し、$f = (U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^2$ $/ \{(U_X^2 / m)^2 / (m-1) + (U_Y^2 / n)^2 / (n-1)\}$ に最も近い整数	$(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{\alpha/2}\,(f)\,(U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y$ $\leqq (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{\alpha/2}\,(f)\,(U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^{1/2}$

（注） m, n：標本サイズ（通常、100 以上で 大、100 未満で 小）， μ, μ_X, μ_Y：母平均， σ^2, σ_X^2, σ_Y^2：母分散， r：母比率， η：母相関係数 ρ をフィッシャーの z 変換した変数
S^2：標本平均の分散， U^2：不偏分散， R：標本比率， X_i, Y_i：標本データ， $\bar{X}$, $\bar{Y}$：標本平均， $\bar{D}$：2 標本データの差の平均， ζ：標本相関係数をフィッシャーの z 変換した変数
z_L, z_U：母相関係数の推定で使用する変数（標本サイズ、標本相関係数、標準正規分布のパーセント点から計算して求める）
1 − α：信頼係数， $z_{\alpha/2}$：標準正規分布のパーセント点， $t_{\alpha/2}(n)$：自由度 n の t 分布のパーセント点， $\chi_{\alpha/2}(n)$ など：自由度 n のカイ二乗分布のパーセント点

3-1. 区間推定（1標本）： 母平均の推定（母分散が既知）

母集団の確率分布が正規分布　N（μ，σ^2）で、母分散　σ^2 が既知のとき、母平均　μ　を区間推定する。
推定にあたっては、標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$ を使用する（X_i は標本データ、n は標本サイズ）。

（注）N（μ，σ^2）は、平均 μ，分散 σ^2 の正規分布を表す
（図4）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）母集団が正規分布 N（μ，σ^2）なので、その標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 N（μ，σ^2/n）に従う。
　　（別途資料「いろいろな確率分布」の付録19を参照）

（2）この正規分布 N（μ，σ^2/n）を、（式9）によって標準化する。このとき、統計量（確率変数）T は、標準正規分布 N（0, 1^2）に従う。
　　（別途資料「いろいろな確率分布」の付録19を参照）。

$$T = (\bar{X} - \mu) / (\sigma^2 / n)^{1/2} = (\bar{X} - \mu) / (\sigma / n^{1/2}) \quad \cdots \quad （式9）$$

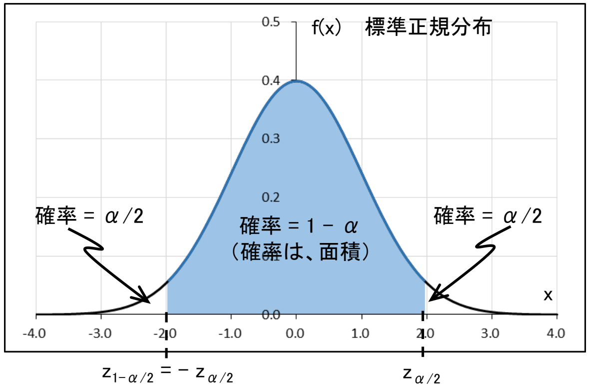
（3）確率 1 − α = 信頼度 100（1 − α）% で母平均の区間推定を行う。つまり、信頼度 100（1 − α）% で母平均が入る信頼区間の上限と下限を求める。
　　この信頼区間の上限は標準正規分布の上側　$\alpha/2$ % 点 = $z_{\alpha/2}$，信頼区間の下限は標準正規分布の下側　$\alpha/2$ % 点 = $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$　になる（図5）。
　　よって、（式9）を使用して、信頼度 100（1 − α）% の信頼区間を下記のように表すことができる。

$$-z_{\alpha/2} \leqq (\bar{X} - \mu) / (\sigma / n^{1/2}) \leqq z_{\alpha/2}$$

　　この式を変形して、母平均　μ　を推定値の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。

$$-z_{\alpha/2} (\sigma / n^{1/2}) \leqq \bar{X} - \mu \leqq z_{\alpha/2} (\sigma / n^{1/2})$$

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} (\sigma / n^{1/2}) \leqq \mu \leqq \bar{X} + z_{\alpha/2} (\sigma / n^{1/2}) \quad \cdots \quad （式10）$$



（図5）母平均の区間推定

（式10）が母平均　μ　の信頼度 100（1 − α）% の推定区間になる。
この信頼区間は、（式10）に標本サイズ n，母分散　σ^2，標本平均 $\bar{X}$ の値を代入して求めることができる。
なお、（式10）は、標本サイズ n が区間推定の幅に影響していることを表している。標本サイズが大きくなると信頼区間の幅は狭くなる（付録15）。

（注）信頼度 100（1 − α）% とは、推定した信頼区間のうち 100（1 − α）% は母平均を含み、100 α % は母平均を 含まない、ということを意味する。
　　つまり、母平均は固定の値で、変化するのは信頼区間であり、信頼区間が固定で母平均が変化しそこに含まれるか否かということではない。

（例）

母集団（正規分布）の母平均　μ　を信頼度 95 % で区間推定して信頼区間を求める。 なお、母分散は既知で、σ^2 = 1.4 であるとする。
また、標本サイズは n = 5 であり、標本データは、36.1, 36.7, 33.5, 35.1, 34.2 である。

・・・　区間推定の結果は　・・・

信頼度が 95 % であるということは、α = 1 − 95 / 100 = 0.05 である。
標準正規分布のパーセント点は、Excel の関数を使用して求めることができる（付録2）。 NORM.INV(確率, 平均, 分散) である。

$$-z_{\alpha/2} = -z_{0.05/2} = -z_{0.025} = \mathrm{NORM.INV}(0.025, 0, 1) = -1.960$$

$$z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = \mathrm{NORM.INV}(1 - 0.025, 0, 1) = 1.960$$

また、標本平均 $\bar{X}$ = (36.1 + 36.7 + 33.5 + 35.1 + 34.2) / 5 = 35.2

信頼度 95 % の信頼区間は、（式10）に、α = 0.05， n = 5， 母分散　σ^2 = 1.4， $\bar{X}$ = 35.2， $z_{0.025}$ = 1.960 を代入して求める。

$$35.2 - 1.960 (1.4 / 5)^{1/2} \leqq \mu \leqq 35.2 + 1.960 (1.4 / 5)^{1/2}$$

$$34.2 \leqq \mu \leqq 36.2$$

これが、母平均　μ　の信頼度 95 % の信頼区間になる。

3-2. 区間推定（1標本）: 母平均の推定（母集団分布が未知）

母集団の確率分布が未知のとき、母平均 μ を区間推定する。
推定にあたっては、標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$ と標本分散 $S^2 = (\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2) / n$ を使用する。
（X_i は標本データ、n は標本サイズで十分に大きい、例えば、$n \geqq 100$場合）。

（図6）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）標本サイズが大きいときには、母集団が母平均 μ と母分散 σ^2 である確率分布であれば、中心極限定理によって、標本平均 $\bar{X}$ は、平均 μ, 分散 σ^2/n の正規分布に近づくことが知られている（別途資料「いろいろな確率分布」の付録46を参照）。

（2）この平均 μ, 分散 σ^2/n の正規分布を、（式9）と同じように標準化する。つまり、統計量（確率変数）T の従う確率分布が平均 = 0, 分散 = 1 の標準正規分布になるように変換する。但し、母分散 σ^2 は未知なので、不偏分散 U^2 で代替する。また、標本サイズが大きいので、さらに不偏分散 U^2 を標本分散 S^2 で代替する。その結果、（式１１）で表す統計量を得る。

$T = (\bar{X} - \mu) / (S / n^{1/2})$ ・・・ （式１１）

（3）確率 $1 - \alpha$ = 信頼度 $100(1 - \alpha)$ % で母平均の区間推定を行う。つまり、信頼度 $100(1 - \alpha)$ % で母平均が入る信頼区間の上限と下限を求める。
この信頼区間の上限は標準正規分布の上側 $\alpha/2$ % 点 $= z_{\alpha/2}$, 信頼区間の下限は標準正規分布の下側 $\alpha/2$ % 点 $= z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$ になる（図5）。
よって、（式１１）を使用して、信頼度 $100(1 - \alpha)$ % の信頼区間を下記のように表すことができる。

$-z_{\alpha/2} \leqq (\bar{X} - \mu) / (S / n^{1/2}) \leqq z_{\alpha/2}$

この式を変形して、母平均 μ を推定値の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。

$-z_{\alpha/2}(S/ n^{1/2}) \leqq (\bar{X} - \mu) \leqq z_{\alpha/2}(S/ n^{1/2})$

$\bar{X} - z_{\alpha/2}(S/ n^{1/2}) \leqq \mu \leqq \bar{X} + z_{\alpha/2}(S/ n^{1/2})$ ・・・ （式１２）

（式１２）が母平均 μ の信頼度 $100(1 - \alpha)$ % の信頼区間になる。
この信頼区間は、（式１２）に標本サイズ n, 標本平均 $\bar{X}$, 標本分散 S^2 の値を代入して求めることができる。

（例）

母集団（正規分布に限らない）の母平均 μ を信頼度 95 % で区間推定して信頼区間を求める。 なお、母分散 σ^2 は未知であるとする。
また、標本サイズ $n = 100$, 標本平均 $\bar{X} = 1000$, 標本分散 $S^2 = 900$ である。

・・・ 区間推定の結果は ・・・

信頼度が 95 % であるということは、$\alpha = 1 - 95 / 100 = 0.05$ である。
標準正規分布のパーセント点は、Excel の関数を使用して求めることができる（付録２）。 NORM.INV(確率, 平均, 分散) である。

$-z_{\alpha/2} = -z_{0.05/2} = -z_{0.025}$ = NORM.INV(0.025, 0, 1) = − 1.960

$z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025}$ = NORM.INV(1 − 0.025, 0, 1) = 1.960

信頼度 95 % の信頼区間は、（式１２）に、$\alpha = 0.05$, $n = 100$, $\bar{X} = 1000$, $S^2 = 900$, $z_{0.025} = 1.960$ を代入して求める。

$1000 - 1.960(900/100)^{1/2} \leqq \mu \leqq 1000 + 1.960(900 / 100)^{1/2}$

$994.1 \leqq \mu \leqq 1005.9$

これが、母平均 μ の信頼度 95 % の信頼区間になる。

3-3．区間推定（1標本）：母平均の推定する（母分散が未知）

母集団の確率分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ で、母分散 σ^2 が未知のとき、母平均 μ を区間推定する。
推定にあたっては、標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$ と不偏分散 $U^2 = (\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2) / (n-1)$ を使用する。

（図7）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）母分散 σ^2 が未知なので、不偏分散 U^2 で代替する。
つまり、（式9）の代わりに、（式13）で表す統計量を用意する。

$$T = (\bar{X} - \mu) / (U / n^{1/2}) \quad \cdots \quad (式13)$$

（2）（式13）で表される統計量 T は、自由度 n − 1 の t 分布に従うことを利用する（付録7）。
確率 $1 - \alpha$ = 信頼度 $100(1-\alpha)$ % で母平均の区間推定を行う。つまり、信頼度 $100(1-\alpha)$ % で母平均が入る信頼区間の上限と下限を求める。
この信頼区間の上限は自由度 n の t 分布の上側 $\alpha/2$ % 点 = $t_{\alpha/2}(n-1)$，信頼区間の下限は自由度 n の t 分布の下側 $\alpha/2$ % 点 = $t_{1-\alpha/2}(n-1) = -t_{\alpha/2}(n-1)$ になる（図8）。
よって、（式13）を使用して、信頼度 $100(1-\alpha)$ % の信頼区間を下記のように表すことができる。

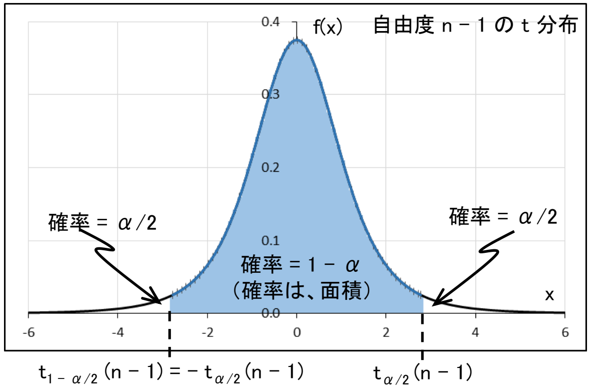
$$-t_{\alpha/2}(n-1) \leqq (\bar{X} - \mu) / (U / n^{1/2}) \leqq t_{\alpha/2}(n-1)$$

この式を変形して、母平均 μ を推定値の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。

$$-t_{\alpha/2}(n-1)(U / n^{1/2}) \leqq \bar{X} - \mu \leqq t_{\alpha/2}(n-1)(U / n^{1/2})$$

$$\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)(U / n^{1/2}) \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)(U / n^{1/2}) \quad \cdots \quad (式14)$$

（式14）が母平均 μ の信頼度 $100(1-\alpha)$ % の信頼区間になる。
この信頼区間は、（式14）に標本サイズ n， 標本平均 $\bar{X}$， 不偏分散 U^2 の値を代入して求めることができる。



（図8）母平均の区間推定

（例）

母集団（正規分布）の母平均 μ を信頼度 95 % で区間推定して信頼区間を求める。
なお、標本サイズは n = 5 であり、標本データは、36.1, 36.7, 33.5, 35.1, 34.2 である。

･･･ 区間推定の結果は、･･･

信頼度が 95 % であるということは、$\alpha = 1 - 95 / 100 = 0.05$ である。また、標本平均を使用しているので、自由度 = 標本サイズ − 1 である。
自由度 n − 1 = 5 − 1 = 4 の t 分布のパーセント点は、Excel の関数を使用して求めることができる（付録2）。 T.INV(確率, 自由度) である。

$$-t_{\alpha/2}(n) = -t_{0.05/2}(4) = -t_{0.025}(4) = \text{T.INV}(0.025, 4) = -2.776$$

$$t_{\alpha/2}(n) = t_{0.05/2}(4) = t_{0.025}(4) = \text{T.INV}(1 - 0.025, 4) = 2.776$$

また、標本平均 $\bar{X} = (36.1 + 36.7 + 33.5 + 35.1 + 34.2) / 5 = 35.2$

不偏分散 $U^2 = \{(36.1 - 35.2)^2 + (36.7 - 35.2)^2 + (33.5 - 35.2)^2 + (35.1 - 35.2)^2 + (34.2 - 35.2)^2\} / (5 - 1) = 1.58$

信頼度 95 % の信頼区間は、（式14）に、$\alpha = 0.05$， $n = 5$， $\bar{X} = 35.2$， $U^2 = 1.58$， $t_{0.025}(4) = 2.776$ を代入して、

$$35.2 - 2.776(1.58 / 5)^{1/2} \leqq \mu \leqq 35.2 + 2.776(1.58 / 5)^{1/2}$$

$$33.6 \leqq \mu \leqq 36.8$$

これが、母平均 μ の信頼度 95 % の信頼区間になる。

3-4．区間推定（1標本）：母分散の推定（母平均が既知）

母集団の確率分布が正規分布　N（μ，σ^2）で、母平均　μ　が既知のとき、母分散　σ^2　を区間推定する。
推定にあたっては、標本データ　X_i　を使用する。

（図9）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）（式15）の統計量 T を用意する。

$$T = \{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\} / \sigma^2 \quad \cdots \quad （式15）$$

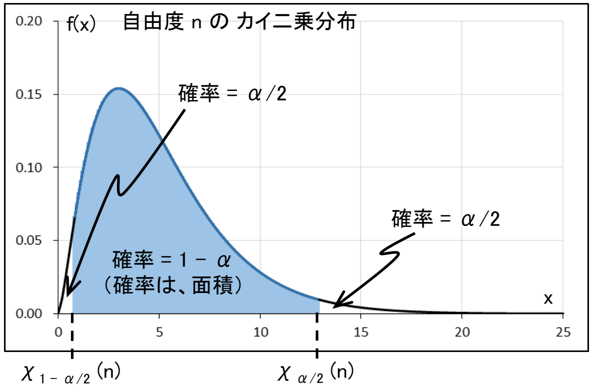
（2）（式15）で表される統計量 T は、自由度 n の カイ二乗分布に従うことを利用する（付録5）。
確率 1 − α = 信頼度 100（1 − α）% で母平均の区間推定を行う。つまり、信頼度 100（1 − α）% で母平均が入る信頼区間の上限と下限を求める。
この信頼区間の上限は自由度 n のカイ二乗分布の上側 $\alpha/2$ % 点 = $\chi_{\alpha/2}(n)$，信頼区間の下限は自由度 n のカイ二乗分布の下側 $\alpha/2$ % 点 = $\chi_{1-\alpha/2}(n)$ になる（図10）。
よって、（式14）を使用して、信頼度 100（1 − α）% の信頼区間を下記のように表すことができる。

$$\chi_{1-\alpha/2}(n) \leqq \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 / \sigma^2) \leqq \chi_{\alpha/2}(n)$$

この式を変形して、母平均　μ　を推定値の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 / \chi_{\alpha/2}(n) \leqq \sigma^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 / \chi_{1-\alpha/2}(n) \quad \cdots \quad （式16）$$

（式16）が母分散　σ^2 の信頼度 100（1 − α）% の信頼区間になる。
この信頼区間は、（式16）に標本サイズ n，標本データ X_i，母平均　μ　の値を代入して、求めることができる。



（図10）母分散の区間推定

（例）
母集団（正規分布）の母分散　σ^2　を信頼係数 95 % で区間推定して信頼区間を求める。
なお、標本サイズは n = 5，標本データは、36.1, 36.7, 33.5, 35.1, 34.2，母平均は μ = 35 である。

･･･　区間推定の結果は、･･･
信頼度が 95 % であるということは、α = 1 − 95 / 100 = 0.05 である。また、自由度は標本サイズに等しいので、5 である。
自由度 n = 5 のカイ二乗分布のパーセント点は、Excel の関数を使用して求めることができる（付録2）。　CHISQ.INV(確率, 自由度）である。

$\chi_{1-\alpha/2}(n) = t_{1-0.05/2}(5) = \chi_{0.975}(5)$ = CHISQ.INV(0.025, 5) = 0.831
$\chi_{\alpha/2}(n) = t_{0.05/2}(5) = \chi_{0.025}(5)$ = CHISQ.INV(1 − 0.025, 5) = 12.833

また、$\sum_{i=1}^{5}(X_i - \mu)^2 = (36.1 - 35)^2 + (36.7 - 35)^2 + (33.5 - 35)^2 + (35.1 - 35)^2 + (34.2 - 35)^2 = 6.52$

信頼度 95 % の信頼区間は、（式16）に、α = 0.05，n = 5，$\sum_{i=1}^{5}(X_i - \mu)^2 = 6.52$，$\chi_{0.975}(5) = 0.831$，$\chi_{0.025}(5) = 12.833$ を代入して、

$6.52 / 12.833 \leqq \sigma^2 \leqq 6.52 / 0.831$

$0.51 \leqq \sigma^2 \leqq 7.85$

これが、母分散　σ^2 の信頼度 95 % の信頼区間になる。

3-5. 区間推定（1標本）： 母分散の推定（母平均が未知）

母集団の確率分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ で、母平均 μ が未知のとき、母分散 σ^2 を区間推定する。
推定にあたっては、標本データ X_i と標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$ を使用する。

（図１１）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）母平均 μ が未知なので、標本平均 $\bar{X}$ で代替してする。
つまり、（式15）の代わりに、（式17）で表す統計量を用意する。

$$T = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 / \sigma^2 \quad \cdots \quad (式17)$$

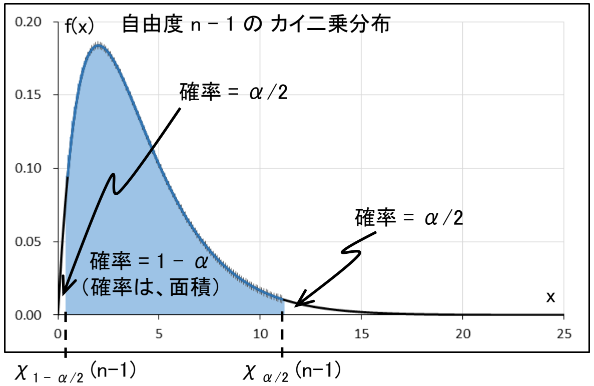
（2）（式17）で表される統計量 T は、自由度 n－1 の カイ二乗分布に従うことを利用する（付録6）。
確率 $1-\alpha$ = 信頼度 $100(1-\alpha)$％ で母平均の区間推定を行う。つまり、信頼度 $100(1-\alpha)$％ で母平均が入る信頼区間の上限と下限を求める。
この信頼区間の上限は自由度 n－1 のカイ二乗分布の上側 $\alpha/2$％ 点 = $\chi_{\alpha/2}(n-1)$，
信頼区間の下限は自由度 n－1 のカイ二乗分布の下側 $\alpha/2$％ 点 = $\chi_{1-\alpha/2}(n-1)$ になる（図12）。
よって、（式14）を使用して、信頼度 $100(1-\alpha)$％ の信頼区間を下記のように表すことができる。

$$\chi_{1-\alpha/2}(n-1) \leqq \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 / \sigma^2) \leqq \chi_{\alpha/2}(n-1)$$

この式を変形して、母平均 μ を推定値 の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 / \chi_{\alpha/2}(n-1) \leqq \sigma^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 / \chi_{1-\alpha/2}(n-1) \quad \cdots \quad (式18)$$

（式18）が母分散 σ^2 の信頼度 $100(1-\alpha)$ ％ の信頼区間になる。
この信頼区間は、（式18）に、標本サイズ n， 標本データ X_i， 標本平均 $\bar{X}$ の値を代入して求めることができる。



（図12）母分散の区間推定

（例）

母集団（正規分布）の母分散 σ^2 を信頼係数 95％ で区間推定して信頼区間を求める。
なお、標本サイズは n = 5，標本データは、36.1, 36.7, 33.5, 35.1, 34.2 である。

･･･ 区間推定の結果は、･･･

信頼度が 95％ であるということは、$\alpha = 1 - 95 / 100 = 0.05$ である。また、標本平均を使用しているので、自由度 = 標本サイズ －1 である
自由度 n－1 = 5－1 = 4 のカイ二乗分布のパーセント点は、Excel の関数を使用して求めることができる（付録2）。 CHISQ.INV(確率, 自由度) である。

$\chi_{1-\alpha/2}(n) = t_{1-0.05/2}(4) = \chi_{0.975}(4)$ = CHISQ.INV(0.025, 4) = 0.484
$\chi_{\alpha/2}(n) = t_{0.05/2}(4) = \chi_{0.025}(4)$ = CHISQ.INV(1 － 0.025, 4) = 11.143

また、標本平均 $\bar{X} = (36.1 + 36.7 + 33.5 + 35.1 + 34.2) / 5 = 35.2$

$$\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2 = (36.1 - 35.2)^2 + (36.7 - 35.2)^2 + (33.5 - 35.2)^2 + (35.1 - 35.2)^2 + (34.2 - 35.2)^2 = 6.32$$

信頼度 95％ の信頼区間は、（式18）に、$\alpha = 0.05$， $n = 5$， $\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2 = 6.32$， $\chi_{0.975}(4) = 0.484$， $\chi_{0.025}(4) = 11.143$ を代入して、

$$6.32 / 11.143 \leqq \sigma^2 \leqq 6.32 / 0.484$$
$$0.57 \leqq \sigma^2 \leqq 13.05$$

これが、母分散 σ^2 の信頼度 95％ の信頼区間になる。

3-6．区間推定（1標本）：母比率の推定

母集団の確率分布が正規分布 N（μ，σ^2）のとき、母比率 r を区間推定する。
推定にあたっては、標本比率 R = 標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$ を使用する。

（図13）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）比率とは、全要素に占める注目する要素の割合のことである。
ベルヌーイ試行では確率変数 X_i が確率 p で 1 の値を、確率 1 − p で 0 の値をとる。このベルヌーイ試行によって形成される母集団分布がベルヌーイ分布であり、このベルヌーイ分布の母平均（期待値）は p である（別途資料「いろいろな確率分布」付録25を参照）。また、見方を変えると、確率変数 X_i が 1 の値をとる確率 p は、母集団の要素が 1 の値をとる割合、母比率 r でもある。つまり、母比率は母平均に等しい。　母比率 r = 母平均 p ・・・（式19）

（2）ベルヌーイ試行を n 回繰り返してできる標本サイズ n の標本の確率変数 X_i の和 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ は二項分布に従う（別途資料「いろいろな確率分布」を参照）。
また、標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n$ は、標本のなかで $X_i = 1$ となる確率変数の割合、つまり、標本比率 R を示しているとも言える。

標本比率 R = 標本平均 = $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / n = X / n$ ・・・（式20）

（3）さて、試行回数（標本サイズ）n が十分に大きいとき、二項分布は正規分布で近似できる（付録4）。これは、標本サイズが十分大きいとき、確率変数 X_i の和 X が二項分布と同じ期待値 n p と分散 n p (1 − p) を持つ（式21）の標準正規分布に従うことを意味している。式変形で、（式19）と（式20）を使って、

$T = (X - n\,p) / (n\,p\,(1 - p))^{1/2} = (n\,R - n\,r) / (n\,r\,(1 - r))^{1/2} = n\,(R - r) / (n\,r\,(1 - r))^{1/2} = (R - r) / (r\,(1 - r) / n)^{1/2}$ ・・・（式21）

（4）（式21）を使用して、母比率 r の区間推定を行う。
確率 1 − α = 信頼度 100 (1 − α) % で母平均の区間推定を行う。つまり、信頼度 100 (1 − α) % で母平均が入る信頼区間の上限と下限を求める。　この信頼区間の上限は標準正規分布の上側 $\alpha/2$ % 点 = $z_{\alpha/2}$，信頼区間の下限は標準正規分布の下側 $\alpha/2$ % 点 = $z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$ になる。
よって、（式21）を使用して、信頼度 100 (1 − α) % の信頼区間は下記のように表すことができる。

$-z_{\alpha/2} \leqq (R - r) / (r\,(1 - r) / n)^{1/2} \leqq z_{\alpha/2}$

この式を変形して、$-z_{\alpha/2}\,(r\,(1 - r) / n)^{1/2} \leqq R - r \leqq z_{\alpha/2}\,(r\,(1 - r) / n)^{1/2}$

$R - z_{\alpha/2}\,(r\,(1 - r) / n)^{1/2} \leqq r \leqq R + z_{\alpha/2}\,(r\,(1 - r) / n)^{1/2}$ ・・・（式22）

ここで、この式を変形して、母比率 r を推定値 の下限と上限の不等号で挟み込む形にして区間推定の式にする。しかし、この計算は複雑であり、代わりに、以下の計算方法が採られる（本来の方法で求めた結果とほぼ差がないということである）。
大数の法則（別途資料「いろいろな確率分布」を参照）によると、標本サイズが十分に大きいとき標本平均は母平均に近づく。つまり、（式20）より標本平均は標本比率であり、一方、（式19）より母平均は母比率であるので、標本サイズが十分に大きいとき、標本比率 R は母比率 r に近づくことが分かる。
そこで、不等号の間の r はそのままで、上限と下限を示す左右の式の r だけを R に置き換えるという方法が取られる。

$R - z_{\alpha/2}\,(R\,(1 - R) / n)^{1/2} \leqq r \leqq R + z_{\alpha/2}\,(R\,(1 - R) / n)^{1/2}$ ・・・（式23）

（式23）が母比率 r の信頼度 100 (1 − α) % の信頼区間になる。
この信頼区間は、（式22）に標本サイズ n，標本比率 R の値を代入して求めることができる。

（例）

選挙の投票率調査を 1,000 人に対して行ったところ、523 人が投票していた。 投票率を信頼度 95 % で区間推定して信頼区間を求める。

・・・ 区間推定の結果は、・・・

95 % の信頼区間は、（式23）に、標本サイズ n = 1000，標本平均 R = 523/1000 = 0.523，$z_{\alpha/2} = 1.960$ を代入して、

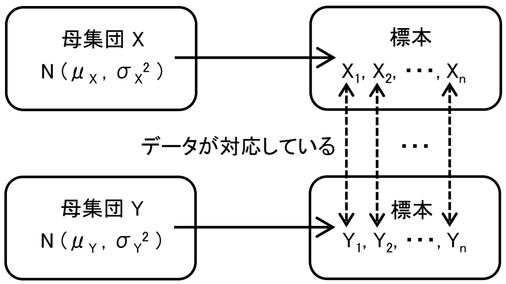
$0.523 - 1.960\,(0.523\,(1 - 0.523) / 1000)^{1/2} \leqq r \leqq 0.523 + 1.960\,(0.523\,(1 - 0.523) / 1000)^{1/2}$

$0.49 \leqq r \leqq 0.55$

これが、母比率 r の信頼度 95 % の信頼区間になる。

4−1. 区間推定（2標本）：母平均の差の推定（対応あり）

正規分布 N（μ_X，σ_X^2）に従う母集団からの標本データと、正規分布 N（μ_Y，σ_Y^2）に従う母集団からの標本データに対応がある場合に、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を区間推定する。
対応がある場合とは、標本データ (X_i, Y_i) (i = 1, 2, ･･･, n) をセットで扱うことができる場合をいう。



（図14）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）2標本の場合であっても標本データが対応している場合は、$D_i = X_i - Y_i$ を求めて、1 標本の場合と同じ扱いにすることができる。つまり、母分散が未知の場合の母平均を求める 3−1. 区間推定（1標本）と同じになる。標本データの差 D_i の平均を求め、このデータを使って母平均の差の推定を行う。

$$\bar{D} = \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)\right) / n$$

（2）母平均の差の分散 σ^2 が未知なので、標本の差の不偏分散 $U^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (D_i - \bar{D})^2\right) / (n-1)$ で代替する。
つまり、（式9）の代わりに、（式24）で表す統計量を用意する。

$$T = (\bar{D} - (\mu_X - \mu_Y)) / (U / n^{1/2}) \quad \cdots \text{（式24）}$$

（3）よって、区間推定の式は、（式24）で示される統計量 T が自由度 n − 1 の t 分布に従うこと（付録7）を利用して、自由度 n − 1 の t 分布のパーセント点 $-t_{\alpha/2}(n-1)$, $t_{\alpha/2}(n-1)$ を使用して、下記のように表すことができる。

$$-t_{\alpha/2}(n-1) \leqq (\bar{D} - (\mu_X - \mu_Y)) / (U / n^{1/2}) \leqq t_{\alpha/2}(n-1)$$

この式を変形して、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を推定値 の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。

$$\bar{D} - t_{\alpha/2}(n-1)(U / n^{1/2}) \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq \bar{D} + t_{\alpha/2}(n-1)(U / n^{1/2}) \quad \cdots \text{（式25）}$$

（式25）が母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ の信頼度 100 (1 − α) ％ の信頼区間になる。
この信頼区間は、（式25）に標本サイズ n，標本の差の平均 $\bar{D}$，標本の差の不偏分散 U^2 の値を代入して、求めることができる。

（例）

2つの母集団（正規分布）の母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を信頼度 95 ％ で区間推定して信頼区間を求める。
例えば、競技者が 5 人で、競技種目 A と B の得点がそれぞれ 10 点満点（表2）であるとき、競技種目 A と B の平均得点の差を区間推定する。
選手ごとに種目A と種目 B の得点がセットになっているので、対応ありのデータである。

（表2）2標本データ

選手名	種目A	種目B	種目間の差
A	9.5	8.9	0.6
B	9.0	9.3	− 0.3
C	6.4	8.2	− 1.8
D	7.5	7.7	− 0.2
E	8.3	9.0	− 0.7
平均	8.14	8,62	−0.48
不偏分散	1.513	0.427	0.767

･･･ 区間推定の結果は、･･･

信頼度が 95 ％ であるということは、$\alpha = 1 - 95 / 100 = 0.05$ である。
また、標本データの差の平均を使用するので、自由度 = 標本サイズ − 1 である。
自由度 n − 1 = 5 − 1 = 4 の t 分布のパーセント点は、Excel の関数を使用して求めることができる（付録2）。 T.INV(確率, 自由度) である。

$$-t_{\alpha/2}(n) = -t_{0.05/2}(4) = -t_{0.025}(4) = \text{T.INV}(0.025, 4) = -2.776$$
$$t_{\alpha/2}(n) = t_{0.05/2}(4) = t_{0.025}(4) = \text{T.INV}(1 - 0.025, 4) = 2.776$$

また、標本データの差の平均は、$\bar{D} = (0.6 - 0.3 - 1.8 - 0.2 - 0.7) / 5 = -0.48$

$$U^2 = ((0.6 - (-0.48))^2 + (-0.3 - (-0.48))^2 + (-1.8 - (-0.48))^2 + (-0.2 - (-0.48))^2 + (-0.7 - (-0.48))^2)/(5-1) = 0.767$$

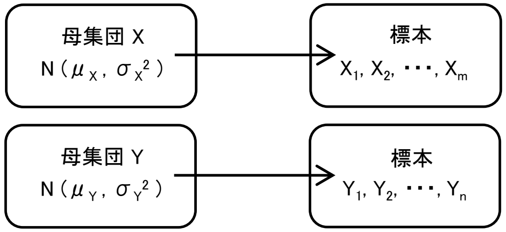
信頼度 95 ％ の信頼区間は、（式25）に、$\alpha = 0.05$，$n = 5$，$\bar{D} = -0.48$，$U^2 = 0.767$，$t_{0.025}(4) = 2.776$ を代入して、

$$-0.48 - 2.776\,(0.767 / 5)^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq -0.48 + 2.776\,(0.767 / 5)^{1/2}$$
$$-1.57 \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq 0.61$$

これが、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ の信頼度 95 ％ の信頼区間になる。

4-2. 区間推定（2標本）: 母平均の差の推定（対応なし、母分散既知）

正規分布 N（μ_X, σ_X^2）に従う母集団からの標本データと、正規分布 N（μ_Y, σ_Y^2）に従う母集団からの標本データに対応がない場合に、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を区間推定する（但し、母分散 σ_X^2 と σ_Y^2 は既知）。



（図15）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{n} X_i) / m$ と $\bar{Y} = (\sum_{i=1}^{n} Y_j) / n$ は、それぞれ下記の正規分布に従う。

（別途資料「いろいろな確率分布」付録19を参照）

$$\bar{X} \sim N(\mu_X, \sigma_X^2/m),\ \bar{Y} \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2/n)$$

この標本平均の差 $\bar{X} - \bar{Y}$ の分布は、下記の正規分布に従う（別途資料「正規分布の概要」再生性を参照）。

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)$$

この正規分布を標準化する（別途資料「いろいろな確率分布」付録19を参照）。

$$T = \{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)\} / (\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2} \sim N(0, 1^2) \quad \cdots \text{（式26）}$$

（2）よって、区間推定の式は、（式26）で示される統計量 T が標準正規分布に従うことを利用して、正規分布のパーセント点 $-z_{\alpha/2}$, $z_{\alpha/2}$ を使用して、下記のように表すことができる。

$$-z_{\alpha/2} \leqq \{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)\} / (\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2} \leqq z_{\alpha/2}$$

この式を変形して、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を推定値の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。

$$-z_{\alpha/2}(\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2} \leqq (\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y) \leqq z_{\alpha/2}(\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2}$$

$$(\bar{X} - \bar{Y}) - z_{\alpha/2}(\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq (\bar{X} - \bar{Y}) + z_{\alpha/2}(\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n)^{1/2} \quad \cdots \text{（式27）}$$

（式27）が母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ の信頼度 $100(1-\alpha)$ % の信頼区間になる。

この信頼区間は、（式27）に標本サイズ n と m, 標本平均の差 $\bar{X} - \bar{Y}$, 母分散 σ_X^2 と σ_Y^2 の値を代入して求めることができる。

（例）

2つの母集団（正規分布）の母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を信頼度 95 % で区間推定して信頼区間を求める。
例えば、競技者が5人で行った競技種目 A と 競技者4人で行った競技書目 B の得点がそれぞれ 10 点満点（表3）であるとき、競技種目 A と B の得点平均の差を区間推定する。

（表3）2標本データ

選手名	種目A	選手名	種目B
A	9.5	F	8.9
B	9.0	G	9.3
C	6.4	H	8.2
D	7.5	I	7.7
E	8.3		
平均	8.14	平均	8.53
分散	1.210	分散	0.382

･･･ 区間推定の結果は、･･･

信頼度が 95 % であるということは、$\alpha = 1 - 95 / 100 = 0.05$ である。
標準正規分布のパーセント点は、Excel の関数を使用して求めることができる（付録2）。
NORM.INV(確率, 平均, 分散) である。

$$-z_{\alpha/2} = -z_{0.5/2} = -z_{0.025} = \text{NORM.INV}(0.025, 0, 1) = -1.960$$
$$z_{\alpha/2} = z_{0.5/2} = z_{0.025} = \text{NORM.INV}(1 - 0.025, 0, 1) = 1.960$$

また、標本平均の差 $\bar{X} - \bar{Y} = 8.14 - 8.53 = -0.39$

信頼度 95 % の信頼区間は、（式27）に、$\alpha = 0.05$, $m = 5$, $n = 4$, $\sigma_X^2 = 1.210$, $\sigma_Y^2 = 0.382$, $z_{0.025} = 1.960$ を代入して求める。

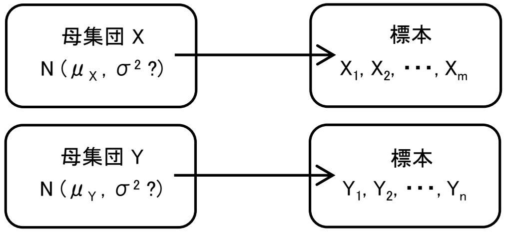
$$-0.39 - 1.960(1.210 / 5 + 0.382 / 4)^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq -0.39 + 1.960(1.210 / 5 + 0.382 / 4)^{1/2}$$

$$-1.52 \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq 0.75$$

これが、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ の信頼度 95 % の信頼区間になる。

4−3．区間推定（2標本）：母平均の差の推定（対応なし、母分散未知だが等分散）

正規分布 $N(\mu_X, \sigma^2)$ に従う母集団からの標本データと、正規分布 $N(\mu_Y, \sigma^2)$ に従う母集団からの
標本データに対応がない場合に、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を区間推定する（但し、母分散は未知だが等分散 σ^2）。



（図16）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{m} X_i) / m$ と $\bar{Y} = (\sum_{i=1}^{n} Y_j) / n$ は、それぞれ下記の正規分布に従う。
　（別途資料「いろいろな確率分布」の付録19を参照）
　　$\bar{X} \sim N(\mu_X, \sigma^2 / m)$, $\bar{Y} \sim N(\mu_Y, \sigma^2 / n)$
　この標本平均の差 $\bar{X} - \bar{Y}$ の分布は、下記の正規分布に従う（別途資料「正規分布の概要」再生性を参照）。
　　$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2 / m + \sigma^2 / n)$
　この正規分布を標準化する（別途資料「いろいろな確率分布」付録19を参照）。
　　$Z = \{ (\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y) \} / (\sigma^2 / m + \sigma^2 / n)^{1/2} \sim N(0, 1^2)$

（2）また、$\chi_X = \{ \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2 \} / \sigma^2$, $\chi_Y = \{ \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \} / \sigma^2$ は、それぞれ自由度 $m-1$ と自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う（付録6）。
　そして、$\chi = \chi_X + \chi_Y$ の分布は、カイ二乗分布の和の再生性が成り立つことから（付録3）、統計量 χ は、自由度 $= (m-1) + (n-1) = m + n - 2$
　のカイ二乗分布に従う。ここで、分散 σ^2 が未知なので不偏分散 $U_X^2 = \{ \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2 \} / (m-1)$ と $U_Y^2 = \{ \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \} / (n-1)$ で代替する。 すると、
　　$\chi = \chi_X + \chi_Y = (m-1) U_X^2 / \sigma^2 + (n-1) U_Y^2 / \sigma^2$

（3）（付録13）に示す t 分布の定義により、（式28）の統計量 T は、自由度 n＋m－2 の t 分布に従う（式変形では、等分散であることから σ^2 が消去される）。
　　$T = Z / (\chi / (m+n-2))^{1/2} = \{ ((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)) / (\sigma^2 / m + \sigma^2 / n)^{1/2} \} / \{ ((m-1) U_X^2 / \sigma^2 + (n-1) U_Y^2 / \sigma^2) / (m+n-2) \}^{1/2}$
　　$= \{ ((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)) / (1/m + 1/n)^{1/2} \} / \{ ((m-1) U_X^2 + (n-1) U_Y^2) / (m+n-2) \}^{1/2}$　･･･（式28）

（4）よって、（式28）を使って、区間推定の式は、
　　$-t_{\alpha/2}(m+n-2) \leqq \{ ((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)) / (1/m + 1/n)^{1/2} \} / \{ ((m-1) U_X^2 + (n-1) U_Y^2) / (m+n-2) \}^{1/2} \leqq t_{\alpha/2}(n+m-2)$
　ここで、$U^2 = ((m-1) U_X^2 + (n-1) U_Y^2) / (m+n-2)$　･･･（式29）と置く。 U^2 は自由度を重みとした加重平均で、プールされた分散と呼ばれる。
　　$-t_{\alpha/2}(m+n-2) \leqq \{ ((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)) / (1/m + 1/n)^{1/2} \} / U \leqq t_{\alpha/2}(n+m-2)$
　この式を変形して、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を推定値の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。
　　$-t_{\alpha/2}(m+n-2)\,U \leqq ((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)) / (1/m + 1/n)^{1/2} \leqq t_{\alpha/2}(n+m-2)\,U$
　　$(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{\alpha/2}(m+n-2) \{ (1/m + 1/n) U^2 \}^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{\alpha/2}(n+m-2) \{ (1/m + 1/n) U^2 \}^{1/2}$　･･･（式30）

（式30）が母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ の信頼度 $100(1-\alpha)$ % の信頼区間になる。
この信頼区間は、（式30）に m と n , $\bar{X} - \bar{Y}$, U^2 (U_X^2 と U_Y^2) の値を代入して求めることができる。

（表4）2標本データ

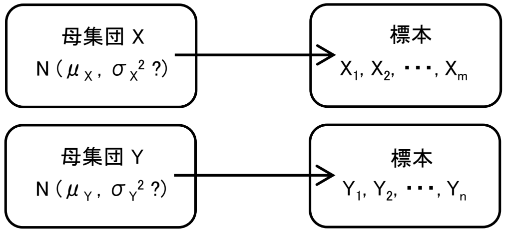
選手名	種目A	選手名	種目B
A	9.5	F	8.9
B	9.0	G	9.3
C	6.4	H	8.2
D	7.5	I	7.7
E	8.3		
平均	8.14	平均	8.53
不偏分散	1.531	不偏分散	0.509

（例）
　（表4）のケースで競技種目 A と B の得点平均の差を信頼度 95 % で区間推定する。
　（表4）は、（表3）で用いた分散が未知なので代わりに不偏分散を用意したものである。

　･･･ 区間推定の結果は、･･･
　（式29）のプールされた分散は、$U^2 = ((5-1)\,1.531^2 + (4-1)\,0.509^2)/(5+4-2) = 1.450$
　信頼度 95 % の信頼区間は、（式30）に、$\alpha = 0.05$, $m = 5$, $n = 4$, $\bar{X} - \bar{Y} = 8.14 - 8.53 = -0.39$,
　$U^2 = 1.450$, $t_{0.025}(5+4-2) = t_{0.025}(7) =$ T.INV(1 − 0.025, 7) = 2.365 を代入して求める。
　　$-0.39 - 2.365 \{ (1/5 + 1/4)\,1.450 \}^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq -0.39 + 2.365 \{ (1/5 + 1/4)\,1.450 \}^{1/2}$
　　$-2.30 \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq 1.52$
　これが、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ の信頼度 95 % の信頼区間になる。

4-4. 区間推定（2標本）： 母平均の差の推定（対応なし、母分散未知） ウェルチの t 推定

正規分布 $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ に従う母集団からの標本データと、正規分布 $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ に従う母集団からの標本データに対応がない場合に、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を区間推定する（但し、母分散は未知 ）。



（図17）母集団と標本

（推定の考え方と方法）

（1）標本平均 $\bar{X} = (\sum_{i=1}^{m} X_i) / m$ と $\bar{Y} = (\sum_{i=1}^{n} Y_j) / n$ は、それぞれ下記の正規分布に従う。

$$\bar{X} \sim N(\mu_X, \sigma_X^2 / m), \quad \bar{Y} \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2 / n)$$

この標本平均の差 $\bar{X} - \bar{Y}$ の分布は、下記の正規分布に従う。

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 / m + \sigma_Y^2 / n)$$

この正規分布を標準化すると、統計量 Z は標準正規分布に従う。

$$Z = \{ (\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y) \} / (\sigma_X^2 / m + \sigma_Y^2 / n)^{1/2} \sim N(0, 1^2) \quad \cdots \text{（式31）}$$

（2）新たに、自由度 m − 1 のカイ二乗分布に従う統計量と自由度 n − 1 のカイ二乗分布に従う統計量を用意する（付録6）。

$$\chi_X = \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2 / \sigma_X^2 \ , \quad \chi_Y = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 / \sigma_Y^2$$

これらの統計量 χ_X と χ_Y を使って、不偏分散 U_X^2 と U_Y^2 を表す。

$$U_X^2 = \{ \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2 \} / (m-1) = \chi_X \sigma_X^2 / (m-1), \quad U_Y^2 = \{ \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \} / (n-1) = \chi_Y \sigma_Y^2 / (n-1)$$

（3）（式31）の未知の母分散を上記の不偏分散で代替した新たな統計量を用意する。

$$T = \{ (\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y) \} / (U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^{1/2} = \{ Z (\sigma_X^2 / m + \sigma_Y^2 / n)^{1/2} \} / \{ (\chi_X \sigma_X^2 / (m(m-1)) + (\chi_Y \sigma_Y^2 / (n(n-1)) \}^{1/2}$$

$$= Z / (a \chi_X + b \chi_Y)^{1/2} \quad \cdots \text{（式32）}$$

但し、 $a = (\sigma_X^2 / (m(m-1))) / (\sigma_X^2 / m + \sigma_Y^2 / n), \ b = (\sigma_Y^2 / (n(n-1))) / (\sigma_X^2 / m + \sigma_Y^2 / n)$ ･･･ （式33）

（4）統計量 T が従う確率分布を知るには、確率変数 $W = a \chi_X + b \chi_Y$ の確率分布を知る必要がある。カイ二乗分布に従う確率変数の定数倍はガンマ分布になる（付録9）。
また、ガンマ分布では和の再生性が成り立つ（付録3）ことから、確率変数 W を、ガンマ分布 $\mathrm{Gamma}(k, \lambda) = \mathrm{Gamma}(f/2, 1/(2g))$ を使って近似することを考える。

（5）確率変数 W の期待値は、$E[W] = E[a \chi_X + b \chi_Y] = a E[\chi_X] + b E[\chi_Y] = a(m-1) + b(n-1)$ （別途資料「いろいろな確率分布」付録42を参照）
また、確率変数 W の分散は、$V[W] = V[a \chi_X + b \chi_Y] = a^2 V[\chi_X] + b^2 V[\chi_Y] = a^2 (2(m-1)) + b^2 (2(n-1)) = 2a^2 (m-1) + 2b^2 (n-1)$
一方、ガンマ分布の期待値は $k/\lambda = (f/2) / (1/(2g)) = g f$， 分散は $k/\lambda^2 = (f/2) / (1/(2g))^2 = 2 g^2 f$ （別途資料「いろいろな確率分布」付録36を参照）
よって近似を考えたとき、 $a(m-1) + b(n-1) = g f$， $2a^2 (m-1) + 2b^2 (n-1) = 2 g^2 f$ が成り立つ。
この連立方程式を解いて、$g = \{ a^2 (m-1) + b^2 (n-1) \} / \{ a(m-1) + b(n-1) \}$， $f = \{ a(m-1) + b(n-1) \}^2 / \{ a^2 (m-1) + b^2 (n-1) \}$ ･･･ （式34）
また、（式34）と（式33）より、$g f = a(m-1) + b(n-1) = [(\sigma_X^2 / (m(m-1)))/(\sigma_X^2 /m + \sigma_Y^2 /n)](m-1) + [(\sigma_Y^2 / (n(n-1)))/(\sigma_X^2 /m + \sigma_Y^2 /n)](n-1) = 1$ ･･･ （式35）

（6）確率変数 W が $\mathrm{Gamma}(f/2, 1/(2g))$ に（近似的に）従うとすれば、確率変数 W / g は自由度 f のカイ二乗分布に従う（付録10）。また、式変形で（式35）の結果を使って、

$$Z / ((W/g)/f)^{1/2} = Z / ((a \chi_X + b \chi_Y) / (g f))^{1/2} = Z / (a \chi_X + b \chi_Y)^{1/2} \quad \cdots \text{（式36）}$$

この確率変数 Z は、定義より自由度 f の t 分布に従う（付録13）。

（7）（式32）＝（式36）であるので、（式32）は自由度 f の t 分布に従うことが分かる。よって、信頼区間の式は、

$$-t_{\alpha/2}(f) \leqq \{ (\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y) \} / (U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^{1/2} \leqq t_{\alpha/2}(f)$$

この式を変形して、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ を推定値の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。

$$(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{\alpha/2}(f) (U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{\alpha/2}(f) (U_X^2 / m + U_Y^2 / n)^{1/2} \quad \cdots \text{（式37）}$$

（式37）が母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ の信頼度 $100(1-\alpha)$ % の信頼区間になる。

（例）

（表4）のケースで競技種目 A と B の得点平均の差を信頼度 95 % で区間推定する（ただし、母分散は未知で等分散でない）。

･･･ 区間推定の結果は、･･･

（付式31）を使って、自由度 $f = (1.531/5 + 0.509/4)^2 / ((1.531/5)^2 / (5-1) + (0.509/4)^2 / (4-1)) = 6.52$ 自由度 f は、計算結果に近い整数値 7 とする。
信頼度 95 % の信頼区間は（式37）に、$\alpha = 0.05$， $m = 5$， $n = 4$， $\bar{X} - \bar{Y} = 8.14 - 8.53 = -0.39$， $U_X^2 = 1.531$， $U_Y^2 = 0.509$， $t_{0.025}(7)$ = T.INV(1 − 0.025, 7) = 2.365 を代入して求める。

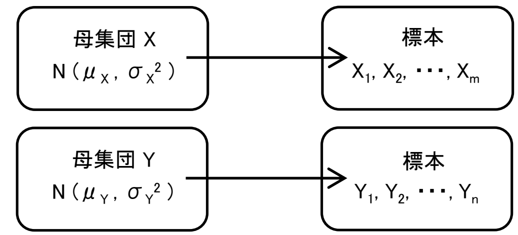
$$-0.39 - 2.365 (1.531/5 + 0.509/4)^{1/2} \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq -0.39 + 2.365 (1.531/5 + 0.509/4)^{1/2}$$

$$-1.95 \leqq \mu_X - \mu_Y \leqq 1.17$$

これが、母平均の差 $\mu_X - \mu_Y$ の信頼度 95 % の信頼区間になる。

5．相関係数の区間推定

相関係数（付録16）に関する推定として、母相関係数の推定についてまとめる。
母相関係数は2つの母集団をまたぐ母数であり、標本相関係数を使って区間推定する。



（図18）母集団と標本

（考え方と方法）

（1）標本相関係数を r として、（式38）に示す変数変換を行う（この変換を、フィッシャーの z 変換という）。

$\xi = (1/2)\ \ln\{(1+r)/(1-r)\}$ ・・・ （式38）

（2）母相関係数を ρ として、（式39）に示す変数変換を行う（この変換も、フィッシャーの z 変換である）。

$\eta = (1/2)\ \ln\{(1+\rho)/(1-\rho)\}$ ・・・ （式39）

（3）（式38）の確率変数 ξ は、標本サイズ n が大きい時には、平均 η , 分散 $1/(n-3)$ の正規分布に従うことが知られている。そこで、確率変数 ξ を標準化した統計量 T を用意する。統計量 T は、標準正規分布に従う。

$T = (\xi - \eta)/(1/(n-3))^{1/2} = (n-3)^{1/2}(\xi - \eta) \sim N(0, 1^2)$ ・・・ （式40）

（4）よって、区間推定の式は、（式40）で示される統計量 T が標準正規分布に従うことを利用して、正規分布のパーセント点 $-z_{\alpha/2}$, $z_{\alpha/2}$ を使用して、下記のように表すことができる。

$-z_{\alpha/2} \leqq (n-3)^{1/2}(\xi - \eta) \leqq z_{\alpha/2}$

この式を変形して、母相関係数の ρ を推定値の下限と上限の不等式で挟み込む形にする。（式39）を代入して

$\xi - z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2} \leqq \eta \leqq \xi + z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2}$ → $\xi - z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2} \leqq (1/2)\ \ln\{(1+\rho)/(1-\rho)\} \leqq \xi + z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2}$

→ $e^{2(\xi - z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} \leqq (1+\rho)/(1-\rho) \leqq e^{2(\xi + z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})}$ → $(1-\rho)\,e^{2(\xi - z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} \leqq 1+\rho \leqq (1-\rho)\,e^{2(\xi + z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})}$

→ 左側の不等号に注目して、$e^{2(\xi - z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} - 1 \leqq \rho\,(e^{2(\xi - z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} + 1)$

右側の不等号に注目して、$\rho\,(e^{2(\xi + z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} + 1) \leqq e^{2(\xi + z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} - 1$

よって、$(e^{2(\xi - z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} - 1)/(e^{2(\xi - z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} + 1) \leqq \rho \leqq (e^{2(\xi + z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} - 1)/(e^{2(\xi + z_{\alpha/2}(n-3)^{-1/2})} + 1)$ ・・・ （式41）

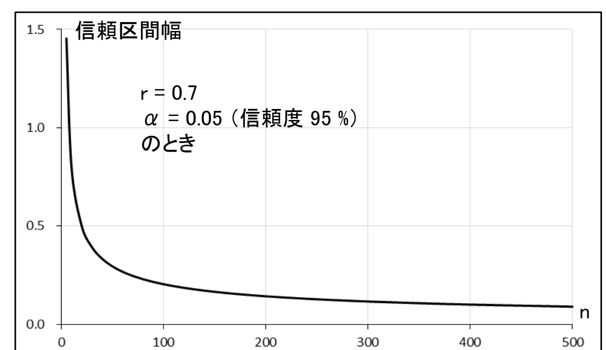
なお、$z_L = \xi - z_{\alpha/2}\ (n-3)^{-1/2}$, $z_U = \xi - z_{\alpha/2}\ (n-3)^{-1/2}$ と置けば、（式42）となる。

$(\exp^{2z_L} - 1)/(\exp^{2z_L} + 1) \leqq \rho \leqq (\exp^{2z_U} - 1)/(\exp^{2z_U} + 1)$ ・・・ （式42）

（式42）が母相関係数 ρ の信頼度 $100(1-\alpha)$ % の信頼区間になる。

この信頼区間は、（式42）に標本サイズ n 、そして、ξ（つまり、（式38）より、標本相関係数 r ）の値を代入して求めることができる。

なお、（図19）に標本サイズと信頼区間の幅の関係を示す。標本サイズが大きくなればなるほど、信頼区間幅は小さくなる。つまり、推定精度が上がることが分かる。信頼区間幅を小さく抑えるためには、少なくとも標本サイズは 100 よりは多く必要なことが分かる。そして、標本サイズが少ない場合には注意が必要で信頼区間が 0 をまたぐか否かに注目することになる（相関があるかないかの判断）。



（図19）標本サイズと信頼区間幅との関係

（例）

標本サイズ n = 1000 , 標本相関係数 r = 0.7 のとき、母相関係数 ρ を信頼度 95 % で区間推定する。

・・・ 区間推定の結果は、・・・

（付式38）より、標本相関係数 r = 0.7 を使って、ξ を求める。

$\xi = (1/2)\ \ln\{(1+0.7)/(1-0.7)\} = (1/2)\ \ln(1.7/0.3) = 0.867$

また、$z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.960$

$z_L = 0.867 - 1.960\ (1000-3)^{-1/2} = 0.805$, $z_U = 0.867 + 1.960\ (1000-3)^{-1/2} = 0.929$

よって、信頼度 95 % の信頼区間は、（式42）に、$z_L = 0.805$, $z_U = 0.929$ を代入して求める。

$(\exp^{2\cdot 0.805} - 1)/(\exp^{2\cdot 0.805} + 1) \leqq \rho \leqq (\exp^{2\cdot 0.929} - 1)/(\exp^{2\cdot 0.929} + 1)$

$0.67 \leqq \rho \leqq 0.73$ 　　これが、母相関係数 ρ の信頼度 95 % の信頼区間になる。

付録1．不偏分散の期待値と分散

不偏分散は U^2 は、以下の通りである（再掲載）。

$U^2 = (1/(n-1))\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ・・・（式５）

n ：標本サイズ， X_i ：標本データ， $\bar{X}$ ：標本平均

（１）不偏分散の期待値

不偏分散 U^2 は不偏推定量であり、U^2 の期待値は、定義より、σ^2 である（再掲載）。

$E[U^2] = \sigma^2$ ・・・（式４）

（２）不偏分散の分散

付録6の「統計量 $T = \{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\}/\sigma^2$ は、自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う」に注目する。

この統計量 T は、（付２３）にあるように、

$T = ((n-1)/\sigma^2)U^2$

と表すことができる。

この統計量 T が従う自由度 $n-1$ のカイ二乗分布の期待値は $n-1$，分散は $2(n-1)$ である（別途資料「いろいろな確率分布」付録４２を参照）。
つまり、

$V[((n-1)/\sigma^2)U^2] = 2(n-1)$ ・・・（付式１）

左辺は変形して、

$V[((n-1)/\sigma^2)U^2] = ((n-1)/\sigma^2)^2 V[U^2]$ ・・・（付式２）

（付式１）＝（付式２）より、

$2(n-1) = ((n-1)/\sigma^2)^2 V[U^2]$

この式から、不偏分散の分散が求まる。

$V[U^2] = 2\sigma^4/(n-1)$ ・・・（付式３）

付録2. 確率分布のパーセント点

パーセント点とは、確率分布の確率（パーセント）に対応した確率変数の値を示す。ここでは、信頼度 95 % のパーセント点を示す。
（注） $1 - \alpha$ = 信頼係数、$100\,(1 - \alpha)$ % = 信頼度 という。 $\alpha = 0.01$ のとき信頼度 99 % （かなり高い信頼度）、
$\alpha = 0.05$ のとき信頼度 95 % （ふつうの信頼度）、$\alpha = 0.1$ のとき信頼度 90 % （やや低い信頼度）であると捉えられている。

（1）標準正規分布のパーセント点

$P\,(X \leqq z_{\alpha}) = 1 - \alpha$ のときの z_{α} の値を上側 α パーセント点という （注： $\alpha = 0.05$ のとき、上側 α パーセント点のことを、% 表現で上側 5 % 点という、 付図1）。 また、$P\,(X \leqq z_{\alpha}) = \alpha$ のときの z_{α} の値を下側 α パーセント点という（付図2）。
標準正規分布は原点に対して左右対称なので、上側 α パーセント点と下側 α パーセント点の絶対値は等しくなる。
また、$P\,(\,|X| \leqq z^*_{\alpha}) = 1 - \alpha$ のときの z^*_{α} の値は、標準正規分布は原点に対して左右対称なので、$z^*_{\alpha} = z_{\alpha/2}$ が成り立つ。
例えば、$\alpha = 0.05$ （信頼度 95 %）の場合（付図3）、Excel 関数を使って、
両側パーセント点の上側 0.025 % 点は、$z_{0.05/2} = z_{0.025}$ = NORM.INV (1 − 0.025, 0, 1) =1.960 となる。
また、下側 0.025 % 点は、$z_{0.975} = -\,z_{0.25} = -\,1.960$ となる。

（2）カイ二乗 分布のパーセント点、

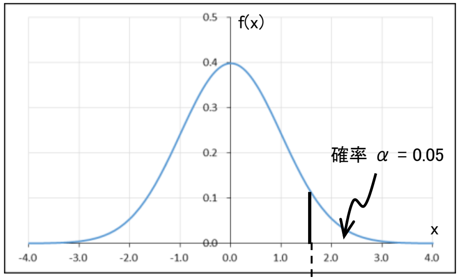
$P\,(X \leqq \chi_{\alpha}(n)) = 1 - \alpha$ のときの $\chi_{\alpha}(n)$ の値を、自由度 n のカイ二乗分布の上側 α パーセント点という。
また、$P\,(X \leqq \chi_{\alpha}(n)) = \alpha$ のときの $\chi_{\alpha}(n)$ の値を、自由度 n のカイ二乗分布の下側 α パーセント点という。
例えば、自由度 n = 4 のカイ二乗分布で、$\alpha = 0.05$ （信頼度 95 %）の場合（付図4）、Excel 関数と使って、
両側パーセント点の上側 0.025 % 点は、$\chi_{0.05/2}(4) = \chi_{0.025}(4)$ = CHISQ.INV (1 − 0.025, 4) = 11.143 となる。
また、下側 0.025 % 点は、$\chi_{1-0.05/2}(4) = \chi_{0975}(4)$ = CHISQ.INV (0.025, 4) = 0.484 となる。

（3）t 分布のパーセント点

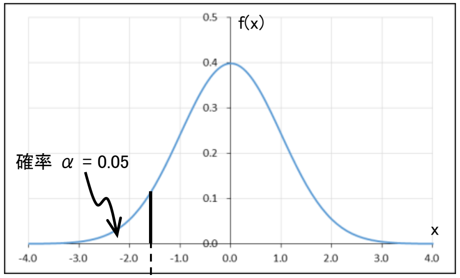
$P\,(X \leqq t_{\alpha}(n)) = 1 - \alpha$ のときの $t_{\alpha}(n)$ の値を、自由度 n の t 分布の上側 α パーセント点という。
t 分布は原点に対して左右対称なので、上側 α パーセント点と下側 α パーセント点の絶対値は等しくなる。
また、$P\,(\,|X| \leqq t^*_{\alpha}(n)) = 1 - \alpha$ のときの $t^*_{\alpha}(n)$ の値は、t 分布は原点に対して左右対称なので、$t^*_{\alpha}(n) = t_{\alpha/2}(n)$ が成り立つ。
例えば、自由度 n = 4 の t 分布で、$\alpha = 0.05$ （信頼度 95 %）の場合（付図5）、Excel 関数を使って、
両側パーセント点の上側 0.025 % 点は、$t_{0.05/2}(4) = t_{0.025}(4)$= T.INV (1 − 0.025, 4) = 2.776 となる。
また、下側 0.025 % 点は、$t_{0.975}(4) = -\,t_{0.025}(4) = -\,2.776$ となる。

（4）F 分布のパーセント点

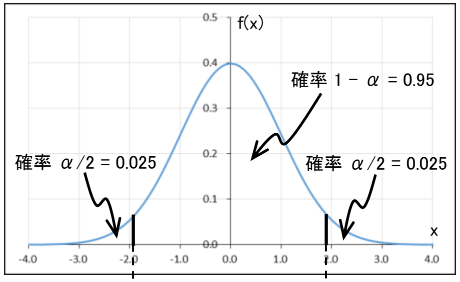
$P\,(X \leqq F_{\alpha}(m, n)) = 1 - \alpha$ のときの $F_{\alpha}(m, n)$を、自由度 (m, n) の F 分布の上側 α パーセント点という。
また、$P\,(X \leqq F_{\alpha}(m, n)) = \alpha$ のときの $F_{\alpha}(m, n)$ を、自由度 (m, n) の F 分布の下側 α パーセント点という。
例えば、自由度 (m, n) = (5, 10) の F 分布で、$\alpha = 0.05$ （信頼度 95 %）の場合（付図6）、Excel 関数を使って、
両側パーセント点の上側 0.025 % 点は、$F_{0.05/2}(5, 10) = F_{0.025}(5, 10)$ = F.INV (1 − 0.025, 5, 10) = 4.236 となる。
また、下側 0.025 % 点は、$F_{1-0.05/2}(5, 10) = F_{0975}$ (5, 10) = F.INV (0.025, 5, 10) = 0.151 となる。



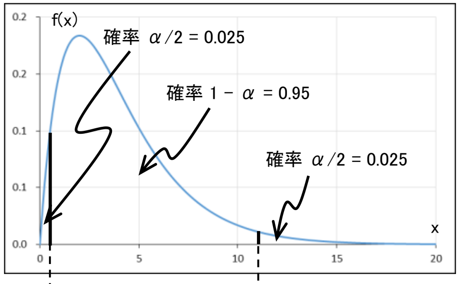
$z_{.005} = 1.645$
（付図1） 標準正規分布の片側（上側）パーセント点



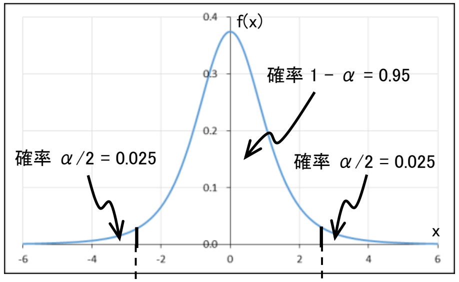
$z_{0.995} = -\,1.645$
（付図2 標準正規分布の片側（下側）パーセント点



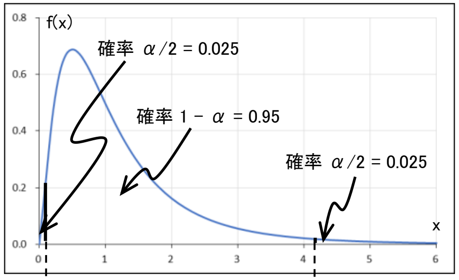
$-\,z^*_{0.05} = z_{0.975} = -\,1.960$ $z^*_{0.05} = z_{.025} = 1.960$
（付図3） 標準正規分布の両側パーセント点



$\chi_{0.975}(4) = 0.484$ $\chi_{0.025}(4) = 11.143$
（付図4） カイ二乗分布の両側パーセント点



$t_{0.975}(4) = -\,2.776$ $t_{0.025}(4) = 2.776$
（付図5） t 分布の両側パーセント点



$F_{0.975}(5, 10) = 0.151$ $F_{0.025}(5, 10) = 4.236$
（付図6） F 分布の両側パーセント点

付録3. カイ二乗分布の和の再生性

2つの確率変数 X と Y がそれぞれカイ二乗分布に従うとき、この確率変数 X と Y の和である X + Y もカイ二乗分布に従う。
これを、カイ二乗分布の和の再生性という。

つまり、
$X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$ のとき、$X + Y \sim \chi^2(m + n)$

（注） 自由度 n のカイ二乗分布を、$\chi^2(n)$ で表す。
確率変数 X が自由度 n のカイ二乗分布に従う」ことを、$X \sim \chi^2(n)$ で表す。

（確認）
モーメント母関数を使用して、和の再生性を確認する（別途資料「いろいろな確率分布」の付録21と付録24参照）。
カイ二乗分布のモーメント母関数は以下のように表される（別途資料「いろいろな確率分布」付録42を参照）。

$M_X(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$ ・・・ （付式4）

よって、確率変数 X + Y のモーメント母関数は、

$M_{X+Y}(t) = E\,[e^{t(X+Y)}] = E\,[e^{tX}\ e^{tY}] = E\,[e^{tX}]\ E\,[e^{tY}] = M_X(t)\ M_Y(t) = (1 - 2t)^{-n/2}\ (1 - 2t)^{-m/2} = (1 - 2t)^{-(m+n)/2}$

従って、確率変数 X + Y は、自由度 m + n のカイ二乗分布に従うことが分かる。 カイ二乗分布の和の再生性が成り立つ。

$X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$ のとき、$X + Y \sim \chi^2(m + n)$ ・・・ （付式5）

なお、カイ二乗分布はガンマ分布の特殊な場合に相当するので、ガンマ分布の和の再生性を確認することで、カイ二乗分布の再生性の確認ができる。

別途資料「いろいろな確率分布」より、
ガンマ分布 ： $\mathrm{Gamma}\,(k, \lambda) = \lambda^k\, x^{k-1}\, e^{-\lambda x} / \Gamma(k)$
カイ二乗分布 ： $\chi^2(n) = (x^{n/2-1}\, e^{-x/2})/(\Gamma(n/2)\, 2^{n/2})$
ここで、$k = n/2,\ \lambda = 1/2$ とおくと、$\mathrm{Gamma}\,(n/2, 1/2) = (1/2)^{n/2}\, x^{n/2-1}\, e^{-(1/2)x} / \Gamma(n/2) = 2^{-n/2}\, x^{n/2-1}\, e^{-x/2} / \Gamma(n/2) = (x^{n/2-1}\, e^{-x/2})/(\Gamma(n/2)\, 2^{n/2}) = \chi^2(n)$
つまり、$k = n/2,\ \lambda = 1/2$ のガンマ分布は、自由度 n のカイ二乗分布になる。

ガンマ乗分布のモーメント母関数は以下のように表される（別途資料「いろいろな確率分布」付録36を参照）。

$M_X(t) = (\lambda/(\lambda - t))^{-k}$ ・・・ （付式6）

よって、$X \sim \mathrm{Gamma}\,(m, \lambda)$, $Y \sim \mathrm{Gamma}\,(n, \lambda)$ のとき、
確率変数 X + Y のモーメント母関数は、

$M_{X+Y}(t) = E\,[e^{t(X+Y)}] = E\,[e^{tX}\ e^{tY}] = E\,[e^{tX}]\ E\,[e^{tY}] = M_X(t)\ M_Y(t) = (\lambda/(\lambda - t))^{-m/2}\ (\lambda/(\lambda - t))^{-n/2} = (\lambda/(\lambda - t))^{-(m+n)/2}$

従って、確率変数 X + Y は、ガンマ分布 $\mathrm{Gamma}\,(m + n, \lambda)$ に従うことが分かる。 ガンマ分布の和の再生性が成り立つ。

$X \sim \mathrm{Gamma}\,(m, \lambda)$, $Y \sim \mathrm{Gamma}\,(n, \lambda)$ のとき、$X + Y \sim \mathrm{Gamma}\,(m + n, \lambda)$ ・・・ （付式7）

付録4. ド･モアブル － ラプラスの定理

試行回数 n が十分に大きなとき、二項分布を標準正規分布で近似することができる、というのが、ド･モアブル － ラプラスの定理である。

（確認）
二項分布はベルヌーイ試行を n 回繰り返したときの確率分布である。
そのベルヌーイ分布の期待値と分散は、それぞれ（付式8）と（付式9）で表される（別途資料「いろいろな確率分布」付録26）。

$E[X_i] = p$ ･･･ （付式8）

$V[X_i] = p(1-p)$ ･･･ （付式9）

X_i ：確率 p で 1， 確率 1 − p で 0 をとる確率変数（$i = 1, 2, \cdots, n$）， n ：試行回数

ここで、$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおくと、確率変数 X は二項分布の確率変数になる。
一方、二項分布の期待値は n p， 分散は n p (1 − p) である（別途資料「いろいろな確率分布」付録28）。

$E[X] = np$ ･･･ （付式10）

$V[X] = np(1-p)$ ･･･ （付式11）

n を十分に大きくしたときに、
中心極限定理によって、ベルヌーイ分布の標本平均 $\bar{X}$ は、期待値と分散がそれぞれ（付式12）と（付式13）で表される正規分布に近づく。
（別途資料「いろいろな確率分布」の中心極限定理を参照）

$E[\bar{X}] = E[X_i] = p$ ･･･ （付式12）

$V[\bar{X}] = V[X_i] / n = p(1-p) / n$ ･･･ （付式13）

標本平均 $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n) / n = X / n$

新しい確率変数として、$Y = X / n - p = \bar{X} - p$ を用意する。この確率変数 Y が従う分布も正規分布に近づく。
（式12）、（式13）を使って確率変数 Y が従う正規分布の期待値と分散を求める。

$E[Y] = E[X / n - p] = E[\bar{X} - p] = E[\bar{X}] - E[p] = p - p = 0$

$V[Y] = V[X / n - p] = V[\bar{X} - p] = V[\bar{X}] - V[p] = p(1-p) / n - 0 = p(1-p) / n$

ここで、確率変数 Y が従う正規分布を標準化する（別途資料「いろいろな確率分布」付録19）。

$(Y - E[Y]) / V[Y]^{1/2} = \{(X / n - p) - 0\} / \{p(1-p) / n\}^{1/2} = (X - np) / \{np(1-p)\}^{1/2} \sim N(0, 1^2)$ ･･･ （付式14）

（付式14）から、この標準正規分布は、平均 n p， 分散 n p (1 − p) を持つ確率分布（これは二項分布である）を標準化したものであることが分かる。
つまり、試行回数 n が十分に大きいときは、二項分布を標準正規分布で近似できることが分かる。

付録5. 統計量 $T=\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\}/\sigma^2$ は、自由度 n のカイ二乗分布に従う

母平均 μ, 母分散 σ^2 の正規分布に従う母集団から標本サイズ n の標本データを抽出し、標本平均を、$\bar{X}=(\sum_{i=1}^{n}X_i)/n$ としたとき、
（付式15）の統計量（確率変数） T は、自由度 n のカイ二乗分布に従う。 このことを確認する。

$$T=\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\}/\sigma^2 \quad \cdots（付式15）$$

（確認）

（付式16）を使って、正規分布に従う母集団を標準正規分布に変換できる（参考、別途資料「いろいろな確率分布」付録19）。

$$Z_i=(X_i-\mu)/\sigma \quad \cdots（付式16）$$

この（付式16）を使用して、（付式15）は（付式17）のように表すことができる。

$$T=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2 \quad \cdots（付式17）$$

（付式17）は、標準正規分布に従う、互いに独立な確率変数 Z_i の二乗和を表している。
この式は、自由度 n のカイ二乗分布の定義式である（付録12）。
統計量（確率変数） T は、自由度 n のカイ二乗分布に従うことを確認できる。

付録6. 統計量 $T=\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\}/\sigma^2$ は、自由度 n－1 のカイ二乗分布に従う

母平均 μ, 母分散 σ^2 の正規分布に従う母集団から標本サイズ n の標本データを抽出し、標本平均を、$\bar{X}=(\sum_{i=1}^{n}X_i)/n$ としたとき、（付式18）の統計量（確率変数） T は、自由度 n－1 のカイ二乗分布に従う。 このことを確認する。

$$T=\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\}/\sigma^2 \qquad \cdots（付式18）$$

（確認）

母集団を標準化して標準正規分布に変換する（別途資料「いろいろな確率分布」付録19を参照）。

$$Z_i=(X_i-\mu)/\sigma \sim N(0,1^2) \qquad \cdots（付式19）$$

標準正規分布に従う確率変数 Z_i の平均（標本平均）を、$\bar{Z}=(\sum_{i=1}^{n}Z_i)/n$ とすると、

$$\bar{X}-\mu=(\sum_{i=1}^{n}X_i)/n-\mu=\{\sum_{i=1}^{n}(\sigma Z_i+\mu)\}/n-\mu=(\sigma\sum_{i=1}^{n}Z_i+\sum_{i=1}^{n}\mu)/n-\mu=\sigma\bar{Z}+n\mu/n-\mu=\sigma\bar{Z} \qquad \cdots（付式20）$$

よって、

$$Z_i-\bar{Z}=(X_i-\mu)/\sigma-(\bar{X}-\mu)/\sigma=(X_i-\bar{X})/\sigma$$

この式を使って、（付式18）を標準正規分布の確率変数 Z で表すことができる。

$$T=\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2 \qquad \cdots（付式21）$$

（付式21）の両辺に、$n\bar{Z}^2$ を足す。

$$T+n\bar{Z}^2=\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2+n\bar{Z}^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2-2(\sum_{i=1}^{n}Z_i)\bar{Z}+n\bar{Z}^2+n\bar{Z}^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2-2n\bar{Z}\bar{Z}+n\bar{Z}^2+n\bar{Z}^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2 \qquad \cdots（付式22）$$

ところで、$n^{1/2}\bar{Z}$ は正規分布に従う Z_i の和と定数倍からなり、正規分布の再生性（別途資料「正規分布の概要」を参照）より、$n^{1/2}\bar{Z}$ も正規分布に従う。
この正規分布は、確率変数 $n^{1/2}\bar{Z}$ の期待値と分散が以下の通りであり、標準正規分布であることがわかる。

$$E[n^{1/2}\bar{Z}]=E[n^{1/2}(\sum_{i=1}^{n}Z_i)/n]=E[n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}Z_i]=n^{-1/2}E[\sum_{i=1}^{n}Z_i]=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}E[Z_i]=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}0=0$$

$$V[n^{1/2}\bar{Z}]=V[n^{1/2}(\sum_{i=1}^{n}Z_i)/n]=V[n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}Z_i]=(1/n)V[\sum_{i=1}^{n}Z_i]=(1/n)\sum_{i=1}^{n}V[Z_i]=(1/n)\sum_{i=1}^{n}1=(1/n)n=1$$

従って、（付式22）の左辺の第二項 $n\bar{Z}^2$ は標準正規分布に従う確率変数 $n^{1/2}\bar{Z}$ の二乗であり、自由度 1 のカイ二乗分布に従う（付録12）。
そして、（付式22）の右辺は、標準正規分布の二乗和であるので、自由度 n のカイ二乗分布に従う（付録12）。

カイ二乗分布に関しては再生性が成り立つ（付録3）。このことを念頭に（式22）を見れば、左辺の第二項が自由度 1 のカイ二乗分布、右辺が自由度 n のカイ二乗分布であることから、左辺の第一項、つまり（付式18）で表される統計量（確率変数）が自由度 n－1 のカイ二乗分布に従うことが分かる。

なお、（付式18）を変形して、不偏分散を使った、同じく自由度 n－1 のカイ二乗分布に従う確率変数（付式23）を得る。

$$T=\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\}/\sigma^2=((n-1)/\sigma^2)\{(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)/(n-1)\}=((n-1)/\sigma^2)U^2 \qquad \cdots（付式23）$$

但し、U^2 は不偏分散で、$U^2=\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\}/(n-1)$

付録7．統計量 $T = (\bar{X} - \mu) / (U / n^{1/2})$ は、自由度 n－1 の t 分布に従う

母平均 μ，母分散 σ^2 の正規分布に従う母集団から標本サイズ n の標本データを抽出し、標本平均を、$\bar{X} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / n$，
不偏分散を、$U^2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right\} / (n-1)$ としたとき、（付式24）の統計量（確率変数） T は、自由度 n－1 の t 分布に従う。 このことを確認する。

$$T = (\bar{X} - \mu) / (U/n^{1/2}) \qquad \cdots \text{（付式24）}$$

（確認）

確率変数 Y が標準正規分布に従い、確率変数 Z が自由度 n のカイ二乗分布に従うとき、
（付式25）の確率変数 X が従う分布を自由度 n の t 分布という。 （付式25）が、t 分布の定義式である（付録13）。

$$X = Y / (Z / n)^{1/2} \qquad \cdots \text{（付式25）}$$

まず、（付式19）より得られる、$X_i = \sigma Z_i + \mu$ を使って、

$$\bar{X} - \mu = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) / n - \mu = \left(\sum_{i=1}^{n} (\sigma Z_i + \mu)\right) / n - \mu = \left(\sigma \sum_{i=1}^{n} Z_i + n\mu\right) / n - \mu = (\sigma \bar{Z} + \mu) - \mu = \sigma \bar{Z} \qquad \cdots \text{（付式26）}$$

そこで、（付式26）を（付式24）に代入する。

$$T = \sigma \bar{Z} / (U/n^{1/2}) = n^{1/2} \sigma \bar{Z} / U = n^{1/2} \sigma \bar{Z} / \left\{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)\right\}^{1/2} = n^{1/2} \bar{Z} / \left\{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 / (\sigma^2 (n-1))\right\}^{1/2}$$

$$= n^{1/2} \bar{Z} / \left\{\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 / (\sigma^2)\right) / (n-1)\right\}^{1/2} \qquad \cdots \text{（付式27）}$$

ここで、確率変数 $n^{1/2} \bar{Z}$ は、付録6 で触れているように、標準正規分布に従う。

また、付録6 より、$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 / \sigma^2$ は、自由度 n－1 のカイ二乗分布に従う。

よって、（付式27）を（付式25）の t 分布の定義式に当てはめて、統計量（確率変数） T は自由度 n－1 の t 分布に従うことを確認できる。

付録8. 確率変数 $T = U_X^2 / U_Y^2$（但し、等分散）は、自由度 (m − 1, n − 1) の F 分布に従う

2つの確率分布の標本平均をそれぞれ、$\bar{X} = (\sum_{i=1}^{m} X_i) / m$ と $\bar{Y} = (\sum_{i=1}^{n} Y_i) / n$ とし、母分散が等しいとする。つまり、$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ であるとする。
また、不偏分散をそれぞれ、$U_X^2 = \{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})\} / (m-1)$ と $U_Y^2 = \{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})\} / (n-1)$ としたとき、
（付式28）の統計量（確率変数） T は、自由度 (m − 1, n − 1) の F 分布に従う。 このことを確認する。

$T = U_X^2 / U_Y^2$ ・・・（付式28）

（確認）

確率変数 Y, Z が互いに独立で、Y が自由度 m のカイ二乗分布、Z が自由度 n のカイ二乗分布に従うとき、
（付式29）の確率変数 X が従う分布を、自由度 (m, n) の F 分布という。（付式29）が、F 分布の定義式である（付録14）。

$X = (Y / m) / (Z / n)$ ・・・（付式29）

まず、（付式28）に不偏分散の式を代入する。

$$T = \{ (\sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})) / (m-1) \} / \{ (\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})) / (n-1) \}$$

$$= \{ ((\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})) / \sigma^2) / (m-1) \} / \{ ((\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})) / \sigma^2) / (n-1) \}$$ ・・・（付式30）

付録6 より、$(\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})) / \sigma^2$ は自由度 m − 1 のカイ二乗分布に従う。同じく、$(\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})) / \sigma^2$ は自由度 n − 1 のカイ二乗分布に従う。
よって、（付式30）を（付式29）の F 分布の定義式に当てはめれば、統計量（確率変数） T は自由度 (m − 1, n − 1) の F 分布に従うことを確認できる。

付録9．X ～確率分布 $\chi^2(n)$ のとき、定数倍 a X ～ 確率分布 Gamma (k, λ)

自由度 n のカイ二乗分布 $\chi^2(f)$ に従う確率変数 X を定数 a 倍した確率変数 a X は, 形状母数 = k , 尺度母数 = λ のガンマ分布 Gamma (k, λ) に従うことを確認する。 つまり、正規分布の場合と異なり、カイ二乗分布では定数倍の再生性は成立しない。

自由度 n のカイ二乗分布 $\chi^2(n)$ の確率密度関数は、$f(x) = x^{n/2-1}\, e^{-x/2}\, 2^{-n/2} / \Gamma(n/2)$ で表すことができる。
また、カイ二乗分布に従う確率変数 X の定数倍 a X に関する閉区間 [s, t] における確率は、

$$P(s \leqq aX \leqq t) = P(s/a \leqq X \leqq t/a) = \int_{s/a}^{t/a} f(x)\,dx = 2^{-n/2} / \Gamma(n/2) \int_{s/a}^{t/a} x^{n/2-1}\, e^{-x/2}\, dx$$

ここで、y = a x として置換積分を行う。dy = a dx , 積分範囲は x : s / a → t / a に対して、y : s → t である。

$$P(s \leqq y \leqq t) = 2^{-n/2} / \Gamma(n/2) \int_{s}^{t} (y/a)^{n/2-1}\, e^{-(y/a)/2} (1/a)\, dy = 2^{-n/2}\, a^{-n/2} / \Gamma(n/2) \int_{s}^{t} y^{n/2-1}\, e^{-y/(2a)}\, dy$$

従って、Y = a X の確率密度関数は被積分の関数を取り出すことによって求まり、形を整えるために、y を x で置き換えて表すと、

$$f(y) = 2^{-n/2}\, a^{-n/2} / \Gamma(n/2) \{ y^{n/2-1}\, e^{-y/(2a)} \} = 2^{-n/2}\, a^{-n/2}\, y^{n/2-1}\, e^{-y/(2a)} / \Gamma(n/2)$$

$$f(x) = 2^{-n/2}\, a^{-n/2}\, x^{n/2-1}\, e^{-x/(2a)} / \Gamma(n/2)$$

ここで、k = n / 2 , λ = 1 / (2 a) とおくと、

$$f(x) = 2^{-k} (1/(2\lambda))^{-k}\, x^{k-1}\, e^{-x/(1/\lambda)} / \Gamma(k) = \lambda^{k}\, x^{k-1}\, e^{-\lambda x} / \Gamma(k)$$

この分布は、形状母数 = k , 尺度母数 = λ のガンマ分布 Gamma (k, λ) である。

付録10. X ～ 確率分布 Gamma (f/2, 1/(2g)) のとき、X/g ～ 確率分布 χ^2(f)

形状母数 = f / 2， 尺度母数 = 2 g のガンマ分布 Gamma (f/2, 2g) に従う確率変数 W に対して、
確率変数 W/g は自由度 f のカイ二乗分布 χ^2(f) に従う、ことを確認する。

形状母数 = k , 尺度母数 = λ のガンマ分布 Gamma (k, λ) の確率密度関数は、$f(x) = \lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(k)$ で表すことができる。

よって、k = f/2， λ = 1/(2g) の ガンマ分布 Gamma (f/2, 1/(2g)) の確率密度関数は、

$$f(x) = (1/(2g))^{f/2}\ x^{f/2-1}\ e^{-x/(2g)} / \Gamma(f/2)$$

また、ガンマ分布に従う確率変数 X の定数倍 X / g に関する閉区間 [s, t] における確率は、

$$P(s \leqq X/g \leqq t) = P(gs \leqq X \leqq gt) = \int_{gs}^{gt} f(x)\,dx = (1/(2g))^{f/2} / \Gamma(f/2) \int_{gs}^{gt} x^{f/2-1}\ e^{-x/(2g)}\,dx$$

ここで、y = x / g として置換積分を行う。dy = (1 / g) dx， 積分範囲は x ： g s → g t に対して、y ： s → t である。

$$P(s \leqq y \leqq t) = (1/(2g))^{f/2} / \Gamma(f/2) \int_{s}^{t} (g\,y)^{f/2-1}\ e^{-(gy)/(2g)}\ g\,dy$$

従って、Y = X / g の確率密度関数は被積分の関数を取り出すことによって求まり、形を整えるために、y を x で置き換えて表すと、

$$f(y) = (1/(2g))^{f/2} / \Gamma(f/2) \{ (g\,y)^{f/2-1}\ e^{-(gy)/(2g)}\ g \} = y^{f/2-1}\ e^{-y/2}\ 2^{-f/2} / \Gamma(f/2)$$

$$f(x) = x^{f/2-1}\ e^{-x/2}\ 2^{-f/2} / \Gamma(f/2)$$

この分布は、自由度 f のカイ二乗分布 χ^2(f) である。

付録11. ウェルチの t 推定の自由度

ウェルチの t 推定で使用する自由度 f は、下記（付式31）を使用して求める。
なお、計算で求まる自由度 f の値は実数値になるが、自由度は整数であるので、計算で求まった実数値に近い整数の値を自由度として使用することになる。

（式34） の f に、（式33）を代入して、

$$f = \{ a(m-1) + b(n-1) \}^2 / \{ a^2(m-1) + b^2(n-1)$$

$$= \{ ((\sigma_X^2/(m(m-1)))/(\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n))(m-1) + ((\sigma_Y^2/(n(n-1)))/(\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n))(n-1) \}$$
$$/ \{ ((\sigma_X^2/(m(m-1)))/(\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n))^2(m-1) + ((\sigma_Y^2/(n(n-1)))/(\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n))^2(n-1) \}$$

$$= \{ (\sigma_X^2/m)/(\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n) + (\sigma_Y^2/n)/(\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n) \} (\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n)^2$$
$$/ \{ ((\sigma_X^2/(m(m-1)))^2/(m-1) + ((\sigma_Y^2/(n(n-1)))^2/(n-1) \}$$

$$= \{\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n)^2 / \{ (\sigma_X^2/m)^2/(m-1) + (\sigma_Y^2/n)^2/(n-1) \}$$

この式の母分散 σ_X^2， σ_Y^2 は未知であるので、母分散を不偏分散 U_X^2， U_Y^2 で代替して計算する。

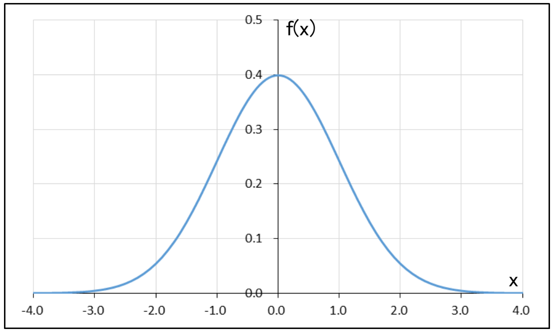
$$f = (U_X^2/m+U_Y^2/n)^2 / \{ (U_X^2/m)^2/(m-1) + (U_Y^2/n)^2/(n-1) \} \quad \cdots \text{（付式31）}$$

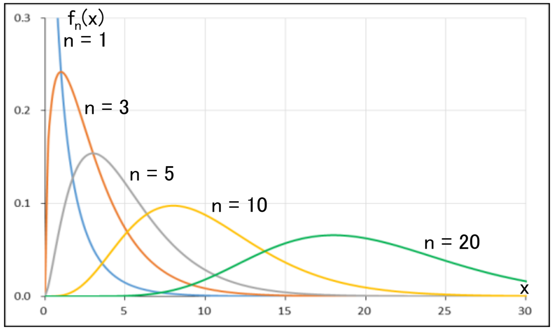
付録12. カイ二乗分布の要約　（別途資料「いろいろな確率分布」より）

■概要

互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が標準正規分布（$\mu = 0, \sigma^2 = 1$）に従うとき、
確率変数 $X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2$ が従う確率分布を、自由度 n （n は和の数に相当）のカイ二乗分布という。

確率変数 X_i が、標準正規分布に従う	ならば、→	$\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ は、自由度 n のカイ二乗分布に従う





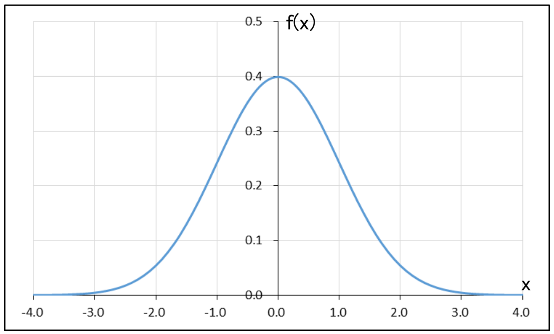
（付図7）カイ二乗分布の導出

付録13．t 分布の要約　（別途資料「いろいろな確率分布」より）

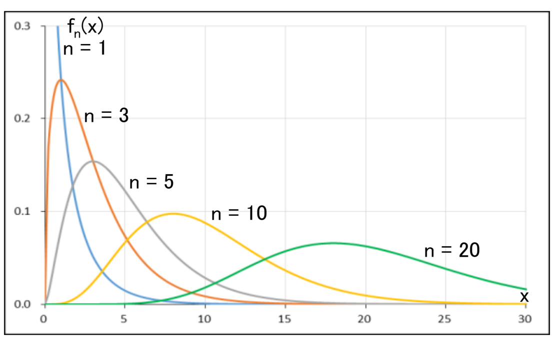
■概要

ｔ分布は、標準正規分布を自由度を加味したカイ二乗分布でスケーリングした確率分布である。

確率変数 X が、標準正規分布に従う

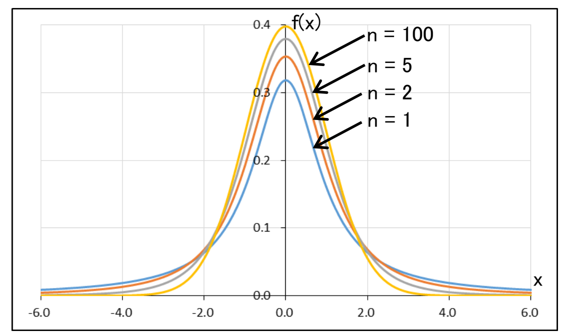


確率変数 Y が、自由度 n のカイ二乗分布に従う



ならば、

$X / (Y / n)^{1/2}$ は、自由度 n の t 分布に従う



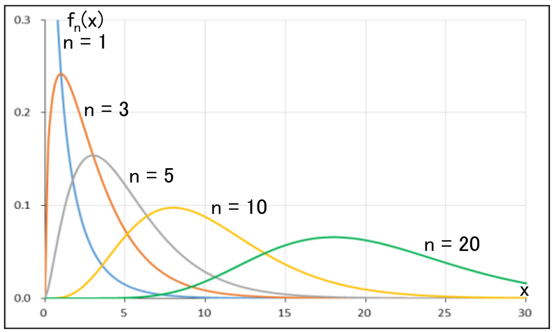
（付図8）t 分布の導出

付録14. F 分布の要約 （別途資料「いろいろな確率分布」より）

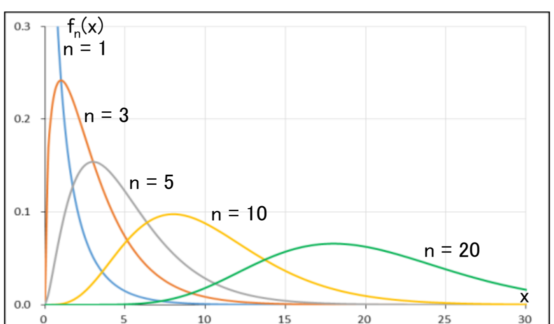
■概要

自由度 m のカイ二乗分布に従う確率変数と自由度 n のカイ二乗分布に従う確率変数が互いに独立であるとき、
自由度を加味した確率変数の比が従う確率分布を、パラメータとして自由度 (m, n) の F 分布という。

確率変数 X が、自由度 m のカイ二乗分布に従う

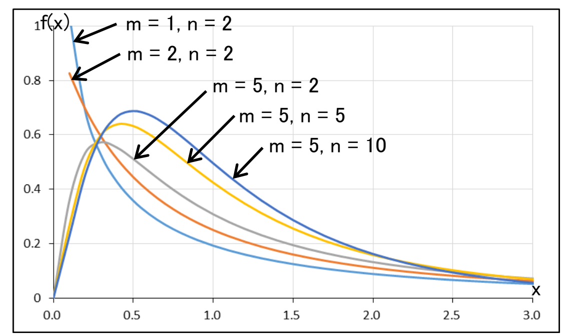


確率変数 Y が、自由度 n のカイ二乗分布に従う



ならば、

(X / m) / (Y / n) は、自由度 (m, n) の F 分布に従う



（付図9）F 分布の導出

付録15. 推定に必要な標本サイズ

３－１. で触れているように、標本サイズ n の大きさが推定区間の幅の大きさに影響する。
ここでは、標準正規分布の母比率を推定する場合を想定して、信頼係数が 95 % のときの信頼区間の幅を 0.2 以下にするのに必要な標本サイズを求める。

母比率の推定区間は（式２３）で表される（再掲載）。

$R - z_{\alpha/2}(R(1-R)/n)^{1/2} \leqq r \leqq R + z_{\alpha/2}(R(1-R)/n)^{1/2}$ ･･･ （式２３）

R ：標本比率， r ：母比率， n ：標本サイズ， $z_{\alpha/2} = 1.960$

（式２３）より、信頼区間の幅は、$2 \cdot z_{\alpha/2}(R(1-R)/n)^{1/2} = 2 \cdot 1.960((R(1-R)/n)^{1/2}$

この幅を 0.2 以下にするのであるから、$2 \cdot 1.960((R(1-R)/n)^{1/2} \leqq 0.2$

標本サイズ n の不等式に変形すると、

$n \geqq (2 \cdot 1.960 / 0.2)^2 R(1-R) = 384.2 R(1-R)$ ･･･ ①

$0 \leqq R \leqq 1$ のもとで、$R(1-R) = -R^2 + R$ の最大値を求めると、

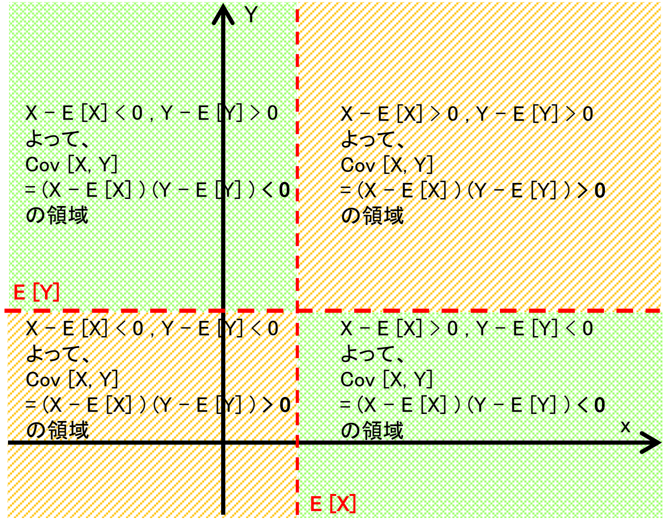
$d(-R^2 + R) / dR = -2R + 1 = 0$ より、$R = 0.5$

この $R = 0.5$ を、式 ① に代入すると、

$n \geqq 384.2 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5) = 96.04$

よって、信頼区間の幅を 0.2 以下にするためには、標本サイズ n を 97 以上にする必要がある。

付録16．相関係数 (correlation coefficient)



（付図10）共分散の符号

相関係数は、2つの確率変数の関係性を示す指標である。

■共分散（covariance）

2つの確率変数の和の分散を考える。

$$V[X+Y] = E[\{(X+Y) - E[X+Y]\}^2] = E[\{(X-E[X]) + (Y-E[Y])\}^2]$$
$$= E[(X-E[X])^2 + (Y-E[Y])^2 + 2(X-E[X])(Y-E[Y])]$$
$$= E[(X-E[X])^2] + E[(Y-E[Y])^2] + 2E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

ここで、母分散 $V[X] = E[(X-E[X])^2]$, $V[Y] = E[(Y-E[Y])^2]$ であり、

共分散（covariance）を $\mathrm{Cov}[X, Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$ で定義すると、

$$V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2\,\mathrm{Cov}[X, Y] \quad \cdots \quad (付式24)$$

つまり、2つ確率変数の和の分散は、それぞれの分散と共分散の和で表される。

■母相関係数

2つの確率変数の共分散は、（付図10）に示すように、それぞれの確率変数の平均（期待値）で区分される左下の領域と右上の領域では正の値をとり、左上の領域と右下の領域では負の値をとる。前者はデータの散布図が右上方向のとき、つまり正の相関があるときに相当し、後者はデータの散布図が右下方向のとき、つまり負の相関があるときに相当する。つまり、共分散を使って相関関係を表すことができる。そして、異なる母集団の共分散を比較できるようにするため、母分散の幾何平均（資料「いろいろな平均値」を参照）を使って共分散を規格化する。

つまり、母相関係数は、共分散を母分散の幾何平均で割った式として定義される。

母相関係数 $\rho[X, Y]$ = （確率変数 X と Y との共分散） / {（確率変数 X の分散）（確率変数 Y の分散）}$^{1/2}$ = $\mathrm{Cov}[X, Y] / (V[X]\,V[Y])^{1/2}$ ・・・ （付式25）

■標本相関係数(ピアソンの積率相関係数)

母相関係数は標本相関係数を使って区間推定する。標本相関係数は、母相関係数の定義式である（付式25）をもとに、（付式26）で定義される。

標本相関係数 r = （データ x_i とデータ y_i の共分散） / {（データ x_i の分散）（データ y_i の分散）}$^{1/2}$ = $\sigma_{xy} / (\sigma_x{}^2\,\sigma_y{}^2)^{1/2} = \sigma_{xy} / (\sigma_x\,\sigma_y)$ ・・・ （付式26）

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / n\right\} / \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 / n\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 / n\right)\right\}^{1/2}$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right\} / \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right)\right\}^{1/2}$$

（付表1）2標本のデータ

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	13.5	16.3	36.4	47.8	31.9	66.5	55,6	61.7	20,6	70.1
y_i	20.5	9.9	28.9	18.4	15.1	47.4	19.4	38.2	17.4	26.2

（例）

（付表1）に示すデータ x_i とデータ y_i の標本データの相関係数を求める。
なお、（付図11）は（付表1）のデータをプロットしたものである。

（1）まず、標本データの平均を求める。

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{10} x_i / n = (13.5 + \cdots + 70.1) / 10 = 42.0, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{10} y_i / n = (20.5 + \cdots + 26.2) / 10 = 24.1$$

（2）標本データの分散 $\sigma_x{}^2$, $\sigma_y{}^2$ → 標準偏差 σ_x , σ_y を求める。

$$\sigma_x = \left\{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 / n\right\}^{1/2} = \{((13.5 - 42.0)^2 + \cdots + (70.1 - 42.0)^2) / 10\}^{1/2} = 20.2$$

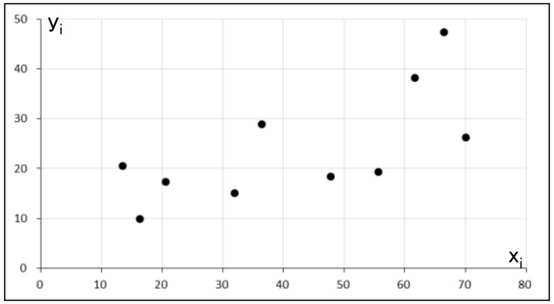
$$\sigma_y = \left\{\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^2\right\} / n\}^{1/2} = \{((20.5 - 24.1)^2 + \cdots + (26.2 - 24.1)^2) / 10\}^{1/2} = 10.8$$

（3）標本データの共分散を求める。

$$\sigma_{xy} = \left\{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right\}/n = \{((13.5 - 42.0)(20.5 - 24.1) + \cdots + (70.1 - 42.0)(26.2 - 24.1))\}/10 = 148.6$$

（4）標本相関係数を求める。

$r = \sigma_{xy} / (\sigma_x\,\sigma_y) = 148.6 / (20.2 \cdot 10.8) = 0.68$ 　なお、CORELL 関数（Excel）が用意されている。



（付図11）2標本のデータのプロット

参考にした書籍

石井俊全：「意味がわかる統計学」、 ベレ出版
向後千春、冨永敦子：「統計学が分かる」、 技術評論社
涌井良幸、涌井貞美：「中学数学でわかる統計の授業」、 日本実業出版
涌井良幸、涌井貞美：「統計学の図鑑」、 技術評論社
上田拓治：「44の例題で学ぶ統計的検定と推定の解き方」、 オーム社
BellCurve 統計WEB：「正規分布のグラフ作成」、 Excelによる正規分布曲線のグラフの作り方 | ブログ | 統計WEB (bellcurve.jp)
AVILEN AI Trend：「不偏分散とは」、 不偏推定量とは？平均と分散を例に分かりやすく解説 | AVILEN AI Trend (ai-trend.jp)
井口豊（長野県、生物化学研究所）：「標本分散と標本不偏分散」、 標本分散と標本不偏分散，n で割るか n-1 で割るか，不偏標準偏差の話題も含めて (sakura.ne.jp)
Qiita Inc.：「最尤推定」、【統計学】尤度って何？をグラフィカルに説明してみる。 - Qiita
ようつべ先生の数学教室：「最尤推定尤」、 20分で分かる最尤推定【最適化数学】 - YouTube
みつのきチャンネル：「最尤法」、 最尤法partⅡ　正規分布での母平均・母分散を推定します！【数学　統計学】 - YouTube
数理情報学（名古屋大学）：「信頼区間・仮説検定」、https://ocw.nagoya-u.jp/files/247/03_conf_interval_test.pdf
予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」：「推定・検定入門」、【大学数学】推定・検定入門①(母集団と標本)/全9講【確率統計】 - YouTube
高校数学の美しい物語：「二項分布の正規近似（ラプラスの定理）」、 二項分布の正規近似（ラプラスの定理） | 高校数学の美しい物語 (manabitimes.jp)
Qiita Inc.：「統計学入門 “標本分散の合併”をしらなくても2標本問題は解ける」、 [統計学入門] "標本分散の合併"を知らなくても2標本問題は解ける - Qiita
Qiita Inc.：「Welch の t 検定」、 Welchのt検定ってどこから来たの？ - Qiita
統計チャンネル：「よく使う区間推定一覧（1標本）」、 統計[40/50] よく使う区間推定 一覧(1標本)【統計学の基礎】 - YouTube
統計チャンネル：「よく使う区間推定一覧（2標本）」、 統計[42/50] よく使う区間推定一覧(2標本)[訂正有]【統計学の基礎】 - YouTube
統計チャンネル：「標本の大きさの問題」、統計[41/50] 標本の大きさ問題【統計学の基礎】 - YouTube
Bell Curve 統計WEB：「相関係数」、 26-3. 相関係数 | 統計学の時間 | 統計WEB (bellcurve.jp)
SiGmA EyE 仕事で使える統計学を：「相関係数の信頼区間を計算しよう」、 相関係数の信頼区間を計算しよう【サンプルサイズもあるよ】| シグマアイ-仕事で使える統計を- (sigma-eye.com)
Qiita Inc.：「相関係数をカンゼンニリカイする」、相関係数をカンゼンニリカイする – Qiita